Calcul scientifique 12 décembre 2013

TP 9: Méthode d'Euler implicite

Exercice 1. Soit Δ_N la matrice du Laplacien discret avec conditions de Dirichlet :

$$\Delta_N = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

On s'intéresse à l'équation de la chaleur discrète : étant donné un point $f_0 \in \mathbb{R}^N$, on cherche une fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ vérifiant l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} f(0) = f_0 \\ f'(t) = \Delta_N f(t) \end{cases}$$

On note $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_N$ les valeurs propres de Δ_N et $v_1, \ldots, v_N$ des vecteurs propres correspondants. On fixe $\tau > 0$ et on note $t_n = n\tau$ une discrétisation du temps. Étant donnée $f_0 \in E_\ell$, on considère les trois schémas suivants pour résoudre l'EDO (`ex` signifie exact, `ee` signifie Euler explicite et `ee` Euler implicite) :

$$\begin{aligned} f_k^{\mathrm{ex}} &= \exp(t_k \Delta_N) f_0 \\ \frac{f_{k+1}^{\mathrm{ee}} - f_k^{\mathrm{ee}}}{\tau} &= \Delta_N f_k^{\mathrm{ee}}, \text{ avec } f_0^{\mathrm{ee}} = 0 \\ \frac{f_{k+1}^{\mathrm{ei}} - f_k^{\mathrm{ei}}}{\tau} &= \Delta_N f_{k+1}^{\mathrm{ei}}, \text{ avec } f_0^{\mathrm{ee}} = 0 \end{aligned}$$

Pour les applications numériques, on fixera $N = 30$.

1. Programmer une fonction qui calcule exactement f_k^{ex}, en utilisant la diagonalisation de Λ_N (on utilisera la fonction `spec` pour calculer les valeurs et vecteurs propres).

2. Tracer l'évolution de f_k^{ex} au cours du temps, en partant de conditions initiales variées (données aléatoire, Dirac, fonction indicatrice, etc.).

3. Programmer une fonction qui calcule itérativement f_k^{ee} et f_k^{ei}, et tracer l'erreur par rapport à la solution exacte calculée précédemment pour $f_0 \in E_\ell$.

4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite des itérées de la méthode d'Euler explicite $(f_k^{\mathrm{ee}})_{k\geq 0}$ reste bornée quelque soit f_0.

5. Même question pour la méthode d'Euler implicite.

Exercice 2. Soit $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On s'intéresse à la discrétisation de l'équation différentielle $y' = -\nabla\Phi(y)$ par la méthode d'Euler implicite.

1. On suppose que $\mathrm{D}^2\Phi \geq -\kappa \mathrm{Id}_n$ où $\kappa \geq 0$. Montrer que pour tout y_0 dans $\mathbb{R}^n$ et $\tau\kappa < 1$, le minimum suivant

$$\min_{y\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{2\tau} \|y_0 - y\|^2 + \Phi(y) \tag{1}$$

est atteint en unique point.

2. En déduire que la méthode d'Euler implicite pour cette équation différentielle est bien définie si $\tau\kappa < 1$. Plus précisément, montrer que pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^n$ les solutions y de l'équation

$$\frac{y - y_0}{\tau} = -\nabla\Phi(y)$$

sont des minimiseurs de (1). En déduire que $\Phi(y) \leq \Phi(y_0)$.

3. On suppose que Φ est propre ($\lim_{+\infty} \Phi = +\infty$) et $\tau\kappa < 1$, et l'on définit une suite $(y_n)_{n\geq 0}$ par la récurrence $y_0 \in \mathbb{R}^n$ et

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = -\nabla\Phi(y_n).$$

Montrer que la suite est bornée des itérées pour la méthode d'Euler implicite reste bornée.