TP 8: Calcul de valeurs et vecteurs propres

Exercice 1. Dans cet exercice, on considère une matrice carrée symmétrique A. Les valeurs propres de A sont triées par valeur absolue décroissante : $|\lambda_1| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$.

1. On suppose que $|\lambda_2| < |\lambda_1|$, et on note u un vecteur propre associé à λ_1. Montrer que, si $\langle x_0 | u \rangle \neq 0$, alors la suite $x_k = \frac{A^k u}{\|A^n u\|}$ a pour uniques valeurs d'adhérence $\pm \frac{u}{\|u\|}$.
(Question subsidiaire : que se passe-t-il si $|\lambda_2| = |\lambda_1|$?)

2. En déduire un algorithme itératif pour calculer la plus grande valeur propre de A. Étudier numériquement et théoriquement sa vitesse de convergence.
Dans la suite, on suppose que toutes les valeurs propres ont une valeur absolue distincte

3. On suppose λ_1 et un vecteur propre u_1 donnés, et on cherche à calculer la seconde valeur propre λ_2 et le vecteur propre correspondant. Calculer les valeurs propres de la matrice $B = A - \lambda_1 \frac{u_1 u_1^2}{\|u_1\|^2}$. En déduire un algorithme permettant d'estimer les k plus grandes valeurs propres de A (on parle de méthode de déflation).

4. Modifier l'algorithme de la puissance calculer la plus petite valeur propre de A en valeur absolue et le vecteur propre correspondant (sous l'hypothèse $|\lambda_n| < |\lambda_{n-1}|$). On parle de méthode de la puissance inverse.

5. Si l'on connait une estimation grossière $\tilde{\lambda}$ d'une valeur propre λ, on applique souvent la méthode de la puissance inverse à $B = A - \lambda \mathrm{Id}$ pour trouver une meilleure estimat ion de λ ainsi que le vecteur propre correspondant. Sous quelle hypothèse sur λ et $\tilde{\lambda}$ cette méthode fonctionne-t-elle ? Écrire une fonction `[lambda, u] = raffine_vp(A,lambda)`.

6. En pratique, pour calculer les k plus petites (ou plus grandes) valeurs propres $\lambda_n, \ldots, \lambda_{n-k}$, on applique la méthode de la déflation pour obtenir une première estimation $\tilde{\lambda}_n, \ldots, \tilde{\lambda}_{n-k}$, et on raffine cette estimation en utilisant l'approche proposée à question précédente. Pourquoi ? Écrire une fonction `[Lambda,U] = petites_vp(A,k)` qui implémente cette approche.

Exercice 2. Étant donné un ensemble fini de points $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$, on appelle graphe de ε-voisinage de X et on note $G_\varepsilon(X)$ le graphe dont les sommets sont les points de X et tel qu'il existe une arête entre deux points x_i et x_j si et seulement si $\|x_i - x_j\| \leq \varepsilon$.

1. Écrire une fonction qui prends en entrée une matrice $N \times 2$ décrivant l'ensemble de points X et retourne la matrice carrée (D_{ij}) telle que $D_{ij} = \|x_i - x_j\|$. (*Indication : ne faire qu'une seule boucle, en construisant la matrice ligne à ligne, cf* `repmat` *dans Scilab.*)

2. Écrire une fonction qui étant donnés X et ε retourne la matrice du laplacien de $G_\varepsilon(X)$.

3. Utiliser la méthode de la puissance inverse pour calculer les 2 plus petites valeurs propres de L et les vecteurs propres correspondants u_1 et u_2. Tracer les ensembles $X^+ = \{x \in X;\ u_2(x) \geq 0\}$ eet $X^- = \{x \in X;\ u_2(x) \leq 0\}$ de deux couleurs différentes.
Culture générale : cette méthode est très utilisée pour décomposer un graphe en deux composantes (clusters) presque déconnectées. On parle de clustering spectral. On peut montrer que les deux composantes construites sont optimales en un certain sens en utilisant une version discrète d'une inégalité de géométrie Riemannienne dûe à Cheeger.

Exercice 3. Dans cet exercice, on s'intéresse au calcul des valeurs propres d'une matrice symétrique A de taille $n \times n$. On définit une suite de matrices de la manière suivante : $A_0 = A$, puis

$$\begin{cases} (Q_i, R_i) = \text{décomposition QR de } A_i \\ A_{i+1} = R_i Q_i \end{cases}$$

La décomposition QR de A_i est calculée par la méthode d'Householder.

1. Montrer que si pour un certain i, la matrice A_i est diagonale, alors les éléments diagonaux de A_i sont les valeurs propres de A. Montrer que sous cette hypothèse, on peut également calculer les vecteurs propres de A.
2. Écrire une fonction Scilab calculant la suite des (A_i). Tracer le maximum de la valeur absolue des éléments non-diagonaux de A_i en fonction de i. Tester sur la matrice du laplacien avec conditions de Dirichlet en 1D, puis sur une matrice symétrique aléatoire.