TP 7: Laplacien de graphe, valeurs propres.

Un *graphe* $G = (S, A)$ est la donnée d'un ensemble fini de sommets A et d'un ensemble d'arêtes $A \subseteq S \times S$. On suppose que le graphe est non orienté, c'est-à-dire que si (v, w) est une arête, alors (w, v) est aussi une arête. On dit qu'un sommet w est *adjacent* à v si (v, w) est une arête dans G, et on note $\mathrm{B}_1(v)$ les sommets adjacents à v (attention, $v \notin \mathrm{B}_1(v)$). La distance $\mathrm{d}_G(v, w)$ entre deux sommets du graphe est définie comme la longueur minimum d'un chemin permettant de relier v à w, et $\mathrm{d}_G(v, w) = +\infty$ s'il n'existe pas de tel chemin.

On note $\mathcal{F}(G)$ l'espace des fonctions sur le graphe G, c'est-à-dire des fonction $f : S \to \mathbb{R}$, et on le muni du produit scalaire $\langle f|g\rangle = \sum_{v\in S} f(v)g(v)$ et de la norme euclidienne induite $\|f\|^2 = \langle f|f\rangle$. L'opérateur *laplacien* du graphe G est défini de la manière suivante :

$$\Delta_G f(v) = \sum_{w\in \mathrm{B}_1(v)} (f(v) - f(w)), \tag{1}$$

où la somme est prise sur les sommets w adjacents à v.
Rappel : Étant donné un opérateur auto-adjoint A de valeurs propres $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_1$,

$$\lambda_1 \leq R_A(x) \leq \lambda_n, \qquad \text{où } R_A(x) = \frac{\langle Ax|x\rangle}{\|x\|^2}$$

avec égalité à gauche si x est le vecteur propre correspondant à λ_1 et à droite si x est le vecteur propre correspondant à λ_n.

1 Laplacien de graphe et clustering

Exercice 1. On commence par démontrer quelques résultats élémentaires sur Δ_G.

1. Démontrer que l'opérateur Δ_G est auto-adjoint, puis que

$$\langle \Delta_G f|f\rangle = \frac{1}{2}\sum_{v\in S}\sum_{w\in \mathrm{B}_1(v)} (f(w) - f(v))^2$$

En déduire que Δ_G est diagonalisable à valeurs propres réelles positives, notées

$$0 \leq \lambda_1(G) \leq \lambda_2(G) \leq \ldots \leq \lambda_n(G).$$

2. En considérant la fonction indicatrice de G, notée $\mathbb{1}_G$, montrer que $\lambda_1(G) = 0$.

3. Démontrer que $\lambda_2(G) = \min_{\langle f|\mathbb{1}_G\rangle=0, f\neq 0} \frac{\langle f|\Delta_G f\rangle}{\|f\|^2}$.

Exercice 2. *Théorème de Fiedler*. Dans cette exercice, on montre des relations entre le rang du noyau de Δ_G et la connexité du graphe sous-jacent.

1. Une *composante connexe* de $G = (S, A)$ est une classe d'équivalence de $S/\sim$ pour la relation d'équivalence $v \sim w$ ssi $\mathrm{d}_G(v, w) < +\infty$. En considérant les fonctions indicatrices des composantes connexes $X_1, \ldots, X_k$ de G, montrer que $\mathrm{rang}(\mathrm{Ker}(\Delta_G)) \geq k$.

2. Montrer que si G est connexe, alors $\mathrm{rang}(\mathrm{Ker}(\Delta_G)) = 1$.
(*Indication : démontrer que* $\lambda_2(G) > 0$).

3. Dans le cas général, montrer que $\mathbb{1}_{X_1}, \ldots, \mathbb{1}_{X_k}$ est une base de $\mathrm{Ker}(\Delta_G)$. En déduire que $\mathrm{rang}(\mathrm{Ker}(\Delta_G)) = k$.

Exercice 3. Le but de cet exercice est d'étudier dans un cas particulier le conditionnement du problème de calcul des valeurs propres d'une matrice. On définit :

$$\begin{aligned}\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) &= \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R});\ A^t = A\},\\ \mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R}) &= \{A \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R});\ \forall v \in \mathbb{R}^n, \langle Av|v\rangle \geq 0\}.\end{aligned}$$

On note $A \leq B$ si $B - A \in \mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$, et en particulier $A \geq 0$ si $A \in \mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$. Étant donnée une matrice B dans $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$, on note $\lambda_1(B) \leq \ldots \leq \lambda_n(B)$ ses valeurs propres. On admet le théorème suivant :

Théorème 1. *(Courant-Fischer). Pour* $A \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$*, et* $i \in \{1, \ldots, n\}$*, on a*

$$\lambda_i(A) = \max\left\{\min_{E\setminus\{0\}} R_A(x);\ E \text{ sev de } \mathbb{R}^n,\ \dim(E) = k\right\}.$$

1. Montrer que si $A, B \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ et $A \leq B$, alors $\lambda_i(A) \leq \lambda_i(B)$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$.

2. Montrer que pour $A \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$, on a au sens matriciel : $-\|A\| \,\mathrm{Id}_n \leq A \leq \|A\| \,\mathrm{Id}_n$.

3. Déduire des questions précédentes que si A et δ_A sont deux matrices symétriques,

$$\lambda_i(A) - \|\delta_A\| \leq \lambda_i(A + \delta_A) \leq \lambda_i(A) + \|\delta_A\|.$$

4. *Estimation du nombre de composantes connexes :* Montrer que si G est un graphe contenant k composantes connexes, $A = \Delta_G$ et $\|\delta_A\| < \frac{\lambda_{k+1}(G)}{2}$, alors

$$\mathrm{Card}(\mathrm{Spec}(A + \delta_A) \cap [-\infty, \lambda_{k+1}(G)/2]) = k.$$

2 Exercices

Exercice 4. *Inégalité de Wirtinger*. On considère G_n le graphe cyclique d'ordre n : il contient n points $x_0, \ldots, x_{n-1}$. Si $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \ldots, n-1\}$, on note $x_k := x_{(k \mod n)}$. Chaque point x_i est relié par une arête aux points x_{i-1} et x_{i+1}.

1. Donner l'expression matricielle de Δ_{G_n} dans la base canonique $e_i(x_j) = \delta_{ij}$.[1]

1. Cette matrice apparaît dans la discrétisation par différences finies du Laplacien sur $[0, 1]$ avec conditions périodiques.

2. En utilisant la formule $\lambda_2(\Delta_{G_n}) = 4\sin^2(\pi/n)$ démontrée dans la fiche précédente, montrer l'inégalité de Wirtinger : pour toute fonction $f : S_n \to \mathbb{R}$ de moyenne nulle, c'est-à-dire $\sum_{0\leq i<n} f(x_i) = 0$ (ou de manière équivalente $\langle f | \mathbb{1}_G\rangle = 0$) on a

$$\sum_{1\leq i<n} f(x_i)^2 \leq \frac{1}{4\sin^2(\pi/n)} \sum_{1\leq i<n} (f(x_i) - f(x_{i+1}))^2$$

3. *(Question subsidiaire)* Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ et de moyenne nulle, c-à-d telle que $\int_0^{2\pi} f(x) = 0$, alors

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2 \mathrm{d}x \leq \int_0^{2\pi} f'(x)^2 \mathrm{d}x.$$

Quels sont les cas d'égalité ? En posant $h = 2\pi/n$, comparer au cas discret.
Indication : Décomposer f dans la base de Fourier.

Exercice 5. *Théorème de Bauer-Fike.* Soit A une matrice diagonalisable et P une matrice inversible telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale. Soit δ_A une perturbation de A. Montrer que

$$\mathrm{Spec}(A + \delta_A) \subseteq \bigcup_{\lambda\in\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{B}(\lambda, \mathrm{cond}(P)\, \|\delta_A\|)$$

où $\mathrm{B}(\lambda, r) = [\lambda - r, \lambda + r]$. Que peut-on dire dans le cas où A est symétrique ?