
TP 7: Laplacien de graphe, valeurs propres.

Un *graphe* $G = (S, A)$ est la donnée d'un ensemble fini de sommets A et d'un ensemble d'arêtes $A \subseteq S \times S$. On suppose que le graphe est non orienté, c'est-à-dire que si (v, w) est une arête, alors (w, v) est aussi une arête. On dit qu'un sommet w est *adjacent* à v si (v, w) est une arête dans G , et on note $B_1(v)$ les sommets adjacents à v (attention, $v \notin B_1(v)$). La distance $d_G(v, w)$ entre deux sommets du graphe est définie comme la longueur minimum d'un chemin permettant de relier v à w , et $d_G(v, w) = +\infty$ s'il n'existe pas de tel chemin.

On note $\mathcal{F}(G)$ l'espace des fonctions sur le graphe G , c'est-à-dire des fonction $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, et on le muni du produit scalaire $\langle f|g \rangle = \sum_{v \in S} f(v)g(v)$ et de la norme euclidienne induite $\|f\|^2 = \langle f|f \rangle$. L'opérateur *laplacien* du graphe G est défini de la manière suivante :

$$\Delta_G f(v) = \sum_{w \in B_1(v)} (f(v) - f(w)), \quad (1)$$

où la somme est prise sur les sommets w adjacents à v .

Rappel : Étant donné un opérateur auto-adjoint A de valeurs propres $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$,

$$\lambda_1 \leq R_A(x) \leq \lambda_n, \quad \text{où } R_A(x) = \frac{\langle Ax|x \rangle}{\|x\|^2}$$

avec égalité à gauche si x est le vecteur propre correspondant à λ_1 et à droite si x est le vecteur propre correspondant à λ_n .

1 Laplacien de graphe et clustering

Exercice 1. On commence par démontrer quelques résultats élémentaires sur Δ_G .

1. Démontrer que l'opérateur Δ_G est auto-adjoint, puis que

$$\langle \Delta_G f|f \rangle = \frac{1}{2} \sum_{v \in S} \sum_{w \in B_1(v)} (f(w) - f(v))^2$$

En déduire que Δ_G est diagonalisable à valeurs propres réelles positives, notées

$$0 \leq \lambda_1(G) \leq \lambda_2(G) \leq \dots \leq \lambda_n(G).$$

2. En considérant la fonction indicatrice de G , notée $\mathbf{1}_G$, montrer que $\lambda_1(G) = 0$.

3. Démontrer que $\lambda_2(G) = \min_{\langle f|\mathbf{1}_G \rangle = 0, f \neq 0} \frac{\langle f|\Delta_G f \rangle}{\|f\|^2}$.

Exercice 2. Théorème de Fiedler. Dans cette exercice, on montre des relations entre le rang du noyau de Δ_G et la connexité du graphe sous-jacent.

1. Une *composante connexe* de $G = (S, A)$ est une classe d'équivalence de S/\sim pour la relation d'équivalence $v \sim w$ ssi $d_G(v, w) < +\infty$. En considérant les fonctions indicatrices des composantes connexes X_1, \dots, X_k de G , montrer que $\text{rang}(\text{Ker}(\Delta_G)) \geq k$.
2. Montrer que si G est connexe, alors $\text{rang}(\text{Ker}(\Delta_G)) = 1$.
(Indication : démontrer que $\lambda_2(G) > 0$).
3. Dans le cas général, montrer que $\mathbb{1}_{X_1}, \dots, \mathbb{1}_{X_k}$ est une base de $\text{Ker}(\Delta_G)$. En déduire que $\text{rang}(\text{Ker}(\Delta_G)) = k$.

Exercice 3. Le but de cet exercice est d'étudier dans un cas particulier le conditionnement du problème de calcul des valeurs propres d'une matrice. On définit :

$$\begin{aligned} \text{Sym}_n(\mathbb{R}) &= \{A \in M_n(\mathbb{R}); A^t = A\}, \\ \text{Sym}_n^+(\mathbb{R}) &= \{A \in \text{Sym}_n(\mathbb{R}); \forall v \in \mathbb{R}^n, \langle Av|v \rangle \geq 0\}. \end{aligned}$$

On note $A \leq B$ si $B - A \in \text{Sym}_n^+(\mathbb{R})$, et en particulier $A \geq 0$ si $A \in \text{Sym}_n^+(\mathbb{R})$. Étant donnée une matrice B dans $\text{Sym}_n(\mathbb{R})$, on note $\lambda_1(B) \leq \dots \leq \lambda_n(B)$ ses valeurs propres. On admet le théorème suivant :

Théorème 1. (Courant-Fischer). Pour $A \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$, et $i \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\lambda_i(A) = \max \left\{ \min_{E \setminus \{0\}} R_A(x); E \text{ sev de } \mathbb{R}^n, \dim(E) = k \right\}.$$

1. Montrer que si $A, B \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$ et $A \leq B$, alors $\lambda_i(A) \leq \lambda_i(B)$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$.
2. Montrer que pour $A \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$, on a au sens matriciel : $-\|A\| \text{Id}_n \leq A \leq \|A\| \text{Id}_n$.
3. Déduire des questions précédentes que si A et δ_A sont deux matrices symétriques,

$$\lambda_i(A) - \|\delta_A\| \leq \lambda_i(A + \delta_A) \leq \lambda_i(A) + \|\delta_A\|.$$

4. *Estimation du nombre de composantes connexes* : Montrer que si G est un graphe contenant k composantes connexes, $A = \Delta_G$ et $\|\delta_A\| < \frac{\lambda_{k+1}(G)}{2}$, alors

$$\text{Card}(\text{Spec}(A + \delta_A) \cap [-\infty, \lambda_{k+1}(G)/2]) = k.$$

2 Exercices

Exercice 4. *Inégalité de Wirtinger.* On considère G_n le graphe cyclique d'ordre n : il contient n points x_0, \dots, x_{n-1} . Si $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \dots, n-1\}$, on note $x_k := x_{(k \bmod n)}$. Chaque point x_i est relié par une arête aux points x_{i-1} et x_{i+1} .

1. Donner l'expression matricielle de Δ_{G_n} dans la base canonique $e_i(x_j) = \delta_{ij}$.¹

1. Cette matrice apparaît dans la discrétisation par différences finies du Laplacien sur $[0, 1]$ avec conditions périodiques.

2. En utilisant la formule $\lambda_2(\Delta_{G_n}) = 4 \sin^2(\pi/n)$ démontrée dans la fiche précédente, montrer l'inégalité de Wirtinger : pour toute fonction $f : S_n \rightarrow \mathbb{R}$ de moyenne nulle, c'est-à-dire $\sum_{0 \leq i < n} f(x_i) = 0$ (ou de manière équivalente $\langle f | \mathbb{1}_G \rangle = 0$) on a

$$\sum_{1 \leq i < n} f(x_i)^2 \leq \frac{1}{4 \sin^2(\pi/n)} \sum_{1 \leq i < n} (f(x_i) - f(x_{i+1}))^2$$

3. (*Question subsidiaire*) Montrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction 2π -périodique de classe \mathcal{C}^1 et de moyenne nulle, c-à-d telle que $\int_0^{2\pi} f(x) = 0$, alors

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx \leq \int_0^{2\pi} f'(x)^2 dx.$$

Quels sont les cas d'égalité ? En posant $h = 2\pi/n$, comparer au cas discret.

Indication : Décomposer f dans la base de Fourier.

Exercice 5. *Théorème de Bauer-Fike.* Soit A une matrice diagonalisable et P une matrice inversible telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale. Soit δ_A une perturbation de A . Montrer que

$$\text{Spec}(A + \delta_A) \subseteq \bigcup_{\lambda \in \text{Spec}(A)} B(\lambda, \text{cond}(P) \|\delta_A\|)$$

où $B(\lambda, r) = [\lambda - r, \lambda + r]$. Que peut-on dire dans le cas où A est symétrique ?