TP 6: Conditionnement, valeurs singulières.

Conditionnement

Dans toute la suite, $\|.\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, et lorsque A est une matrice $n \times n$, on note également $\|A\| = \max_{x \neq 0} \|Ax\| / \|x\|$ la norme matricielle induite. Le *conditionnement* d'une matrice inversible A est la quantité $\mathrm{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$.

Exercice 1. Soit A une matrice carrée inversible et δ_A une seconde matrice carrée telle que $\|\delta_A\| \|A^{-1}\| < 1$.

1. Montrer que la matrice $\mathrm{Id}_n + A^{-1}\delta_A$ est inversible, et qu'on peut borner la norme de son inverse par

$$\left\|(\mathrm{Id}_n + A^{-1}\delta_A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\| \|\delta A\|}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ la solution de $Ax = b$. On se donne une perturbation δ_b de b et on définit δ_x comme la solution du système $(A + \delta_A)(x + \delta_x) = b + \delta_b$. Montrer

$$\frac{\|\delta_x\|}{\|x\|} \leq \frac{\mathrm{cond}(A)}{1 - \mathrm{cond}(A)\frac{\|\delta_A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta_b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta_A\|}{\|A\|}\right).$$

Étant donnée une matrice symétrique, on note $\lambda_1(A) \leq \ldots \leq \lambda_n(A)$ ses valeurs propres. On appelle *valeur singulière de* A les valeurs propres de la matrice symétrique A^tA, et on les note $\sigma_1(A) \leq \ldots \leq \sigma_n(A)$.

Exercice 2. *1.* Montrer que $\|A\| = \sqrt{\sigma_n(A)}$, et en déduire l'expression suivante pour une matrice inversible : $\mathrm{cond}(A) = (\sigma_n(A)/\sigma_1(A))^{1/2}$.

2. En déduire que $\mathrm{cond}(A) = 1$ si et seulement si A est orthogonale.

3. Monter que dans le cas où A est symétrique définie positive, $\mathrm{cond}(A) = \lambda_n(A)/\lambda_1(A)$. Considérons la matrice du laplacien périodique

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ -1 & \ldots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que si ω est une racine $n$ième de l'unité, le vecteur $v = (1, \omega, \ldots, \omega^{n-1})$ est un vecteur propre de Δ_n. En déduire le conditionnement de Δ_n.

Décomposition en valeurs singulières

La décomposition en valeur singulières d'un endomorphisme $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est la donnée d'une base orthogonale $(v_i)_{1\leq i\leq n}$ de l'espace de départ, d'une base orthogonale $(u_i)_{1\leq i\leq m}$ de l'espace d'arrivée et de r réels $0 < \sigma_1 \leq \ldots \leq \sigma_r$ où r est le rang de f, tels que la relation suivante soit vérifiée :

$$f(v_i) = \begin{cases} \sigma_i u_i \text{ si } i \leq r \\ 0 \text{ si } i > r \end{cases}$$

Théorème 1. *Tout endomorphisme admet une décomposition en valeurs singulières.*

Matriciellement, la décomposition en valeur singulières d'une matrice A de m colonnes et m lignes s'écrit sous la forme $A = U\Sigma\,{}^{\mathrm{t}}V$, où U et V sont deux matrices orthogonales de taille $m\times m$ et $n\times n$ respectivement, et où Σ est une matrice diagonale de taille $n\times m$ ayant pour éléments diagonaux $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$. Dans Scilab, la décomposition en valeurs singulières d'une matrice s'obtient via la commande : $[USV] =$`svd`(A).

Exercice 3. On se donne deux ensembles de points $A = x_1, \ldots, x_N$ et $B = y_1, \ldots, y_N$ de l'espace Euclidien $\mathbb{R}^d$, et on suppose que $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N x_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N y_i = 0$. Le problème du recalage rigide consiste à trouver la matrice orthogonale R qui aligne le mieux $R(X)$ à Y au sens des moindres carrés, c'est-à-dire

$$\min_{R\in\mathrm{O}(\mathbb{R}^d)} \sum_{i=1}^N \|Rx_i - y_i\|^2 . \tag{1}$$

Dans cet exercice, on calcule la solution du problème de recalage en utilisant la décomposition en valeurs singulières.

1. Expliquer pourquoi le minimum est atteint dans (1) ? En notant X (resp. Y) la matrice de taille $d \times N$ ayant pour colonnes les vecteurs (x_i) (resp. (y_i)), montrer que le problème (1) est équivalent au problème de maximisation

$$\max_{R\in\mathrm{O}(\mathbb{R}^d)} \mathrm{Tr}(RX\,{}^{\mathrm{t}}Y). \tag{2}$$

2. Notons $C = U\Sigma\,{}^{\mathrm{t}}V$ la décomposition en valeurs singulières de la matrice $C := X\,{}^{\mathrm{t}}Y$. Montrer que R est solution de (2) si et seulement si la matrice orthogonale $M = {}^{\mathrm{t}}VRU$ réalise le maximum de

$$\max_{M\in\mathrm{O}(\mathbb{R}^d)} \mathrm{Tr}(M\Sigma).$$

3. En utilisant l'orthogonalité de la matrice M, montrer que M maximise (2) ssi $m_{ii} = 1$ pour tout i dans $\{1, \ldots, d\}$ ssi $M = \mathrm{Id}$. En conclure que la solution de (1) est unique et donnée par : $R = {}^{\mathrm{t}}UV$, où les matrices U et V sont celles définies à la question précédente.

4. Écrire une fonction `recalage_orthogonal` qui prend en entrée les matrices X et Y et retourne la matrice R qui résoud le problème (1).
5. Application : On considère les ensembles de points échantillonnés aléatoirement sur le graphe de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \cos(3x) + y^2$ de la manière suivante :

```
N = 1000;
x = rand(1, N); y = rand(1, N); z = cos(5 * x) + y.^2;
X = [x; y; z];

R = qr(rand(3,3)); // matrice de rotation aleatoire
Y = 0.01 * rand(3, N);
for i=1:N
  Y(:,i) = Y(:,i) + R * X(:,i);
end
```

Calculer la matrice de recalage orthogonal entre X et Y. Visualiser les ensembles de points $R(X)$ et Y, en utilisant la fonction suivante :

```
function plotpoints3d(Y)
    param3d(Y(1,:), Y(2,:), Y(3,:));
    e = gce();
    e.line_mode="off";
    e.mark_mode="on";
    a = gca();
    a.isoview = "on";
endfunction
```