TP 5: Matrices de Householder, application aux moindres carrés.

Exercice 1. Soit A une matrice possédant m lignes et n colonnes, et $k = \min(m-1, n)$. Le but de l'exercice est de construire une suite de matrices orthogonales $H_1, \ldots, H_k$ de taille $m \times m$ telle que la matrice $H_k \cdot \cdots \cdot H_1 A$ soit une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont positifs.

1. Soit $v \in \mathbb{R}^m$ un vecteur non nul. On note $H(v) = \mathrm{id}_m - 2\frac{vv^t}{\|v\|^2}$. Montrer que H est la matrice de la réflexion par rapport au plan $\{v\}^\perp$, puis que $H(v)^t H(v) = \mathrm{id}_m$ et $H(v)^t = H(v)$. Par la suite, on notera $H(0) = \mathrm{id}_m$.

2. Étant donné un vecteur a de $\mathbb{R}^m$ tel que $\sum_{i=2}^m |a_i| > 0$, montrer que

$$H(a \pm \|a\| e_1)a = \mp \|a\| e_1.$$

Montrer que l'on peut construire un vecteur v tel que $H(v)a = \|a\| e_1$, y compris si $\sum_{i=2}^m |a_i| = 0$.

3. Montrer que si a est la première colonne de A, et $H_1 = H(v)$ où v est le vecteur construit à la question précédente, alors

$$H_1 A = \begin{pmatrix} \|a\| & * & \ldots & * \\ 0 & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \ldots & * \end{pmatrix}.$$

En déduire un algorithme récursif permettant de construire une suite de matrices $H_1, \ldots, H_k$ telles que $H_k \ldots H_1 A$ soit triangulaire supérieure.

Indication: on utilisera le fait que si les k première coordonnées de v sont nulles et les $(m-k)$ dernières coordonnées de x le sont, alors $H(v)x = x$.

4. Montrer que toute matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ admet une décomposition de la forme $A = QR$ où $Q \in M_{m,m}(\mathbb{R})$ est orthogonale et R est triangulaire supérieure de diagonale positive. Écrire une fonction $[q, r] =$`householder_qr`(m) calculant cette décomposition.

5. *Question subsidiaire.* Démontrer l'existence de la décomposition QR d'une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ en utilisant l'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

Exercice 2. Soit A une matrice de $M_{m,n}(\mathbb{R})$ où $m > n$. Étant donné un vecteur b de $\mathbb{R}^m$, on cherche à résoudre le système $Ax = b$. Ce système étant surdéterminé, la résolution se fait aux moindres carrés, i.e. il s'agit de minimiser la fonction $J(x) = \|Ax - b\|^2$.

1. Montrer que x est un minimum de J si et seulement si $A^tAx = A^tb$. Montrer que ce système admet toujours au moins une solution et qu'elle est unique si le rang de A vaut n.

2. Utiliser la décomposition QR de A pour résoudre ce problème dans le cas où le rang de A vaut n.

3. Appliquer cet algorithme au problème de l'approximation de m points $(x_i, y_i)_{1\leq i\leq m}$ aux moindres carrés par un polynôme de degré $n-1$, i.e.

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{m} (y_i - P(x_i))^2 \,;\, P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \right\}.$$

Écrire ce problème sous la forme de la minimisation de $\|Ax-b\|^2$, où A et b sont à déterminer. Tester numériquement avec $n = 4$ et les données

```
x=linspace(0,1,m)';
y = x.^3 + 5*x.^2 + 2 + 0.1*rand(m,1,"normal");
```