TP 4: Résolution de systèmes linéaires symétriques.

Introduction. On considère la résolution de systèmes linéaires qui apparaissent lors de la discrétisation d'équations différentielles avec conditions au bord. Par exemple, ce type de système apparaît lorsqu'on cherche des solutions aux système suivant

$$\begin{cases} u''(x) = f(x), & \text{pour } x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Formellement, on peut discrétiser cette équation différentielle de la manière suivante. On commence par faire les approximations suivantes, dont la justification sera donnée dans un cours ultérieur :

$$\begin{aligned} u'(x) &\simeq \frac{u(x+h/2) - u(x-h/2)}{h}, \\ u''(x) &\simeq \frac{u'(x+h/2) - u'(x-h/2)}{h} \simeq \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} \end{aligned}$$

On considère maintenant un échantillonnage régulier du segment $[0,1]$ contenant $n+2$ points : $x_i = ih$ pour $0 \leq i \leq n+1$ et $h = 1/(n+1)$. On note $u_i = u(x_i)$, $f_i = f(x_i)$. Le système (1) peut alors être réécrit sous la forme discrétisée suivante :

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) = f_i, & \text{pour } i \in \{1, \dots, n\} \\ u_0 = u_{n+1} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

On voit facilement que $(u_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ est une solution de (2) si et seulement si les vecteurs $\mathbf{u} = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $\mathbf{f} = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$ satisfont la relation $A_n \mathbf{u} = h^2 \mathbf{f}$, où A_n est la matrice tridiagonale de taille $n \times n$ définie par

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le but de ce TP est donc de comparer des méthodes de résolution de systèmes linéaires du type $Ax = b$, où A est une matrice symétrique et définie positive.

Exercice 1. Dans cet exercice, on cherche à résoudre un système linéaire $Ax = b$, où A est une matrice symétrique définie positive par des méthodes d'optimisation. On pose

$$J(x) := \frac{1}{2}\langle Ax|x \rangle - \langle b|x \rangle.$$

1. Montrer que pour tout point x, et tout vecteur v, l'application $t \mapsto J(x+tv)$ est strictement convexe. En déduire que la fonction J est convexe.

2. Montrer que J possède un unique minimum global x_{sol}, qui est l'unique solution de l'équation $Ax = b$.

3. La méthode de gradient à pas constant $\tau > 0$ consiste à construire une suite minimisante définie par récurrence comme suit :

$$x_0 \in \mathbb{R}^n, \ x_{k+1} = x_k - \tau \nabla J(x_k).$$

Montrer que la suite (x_k) converge vers x_{sol} quelque soit la valeur de x_0 pourvu que $\tau < 2/\lambda_n$ où λ_n est la plus grande valeur propre de A.

4. Programmer la méthode de gradient à pas constant. Tracer les résidus $\|Ax_k - b\|$ en fonction de k pour différentes valeurs de τ. Illustrer numériquement la nécessité de la condition $\tau < 2/\lambda_n$.

5. On s'intéresse maintenant à l'algorithme de gradient à pas optimal. Étant donné un point x, et $v := \nabla J(x)$, calculer explicitement le minimum de $t \mapsto J(x+tv)$. En partant d'un vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque, on posera : $v_k = \nabla J(x_k)$, $t_k = \arg\min_t J(x_k + tv_k)$ et finalement $x_{k+1} = x_k + t_k v_k$. Calculer explicitement la relation de récurrence.

6. Programmer la méthode de gradient à pas optimal, et comparer sa vitesse de convergence à celui de la méthode de gradient à pas fixe.

Exercice 2. On propose de résoudre explicitement un système linéaire $Ax = b$, où A est une matrice tridiagonale symétrique, en utilisant la décomposition de Cholesky.

1. On considère les deux matrices suivantes, où les vecteurs $(e_i)_{1 \le i \le n-1}$ et $(d_i)_{1 \le i \le n}$ sont à déterminer :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ e_1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

En supposant que $A = LDL^t$ et en identifiant coefficient à coefficient, déterminer les relations entre les coefficients de e et d et ceux de la matrice symétrique A.

2. Montrer que si les éléments diagonaux de A sont non nuls, l'algorithme suivant calcule des vecteurs e et d qui satisfont ces relations :

```
d(1) =  a(1,1);
for k=2:n
  e(k-1) = a(k,k-1)/d(k-1);
  d(k) = a(k,k)-e(k-1)*a(k,k-1)
end
```

3. En déduire un algorithme de résolution de $Ax = b$ en trois étapes : $Ly = b$, $Dz = y$ puis $L^t x = z$. Écrire une fonction Scilab réalisant cet algorithme.