TP 2: Intégration numérique, quadrature de Gauss

Méthode de Newton-Cotes

Exercice 1. Écrire trois fonctions `int_rectangle`, `int_midpoint` et `int_simpson` prenant en paramètre la fonction f, les bornes de l'intervalle d'intégration $[a,b]$ et le nombre d'évaluations de f. Par exemple, la méthode des rectangles à gauche correspond à la discrétisation suivante de l'intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$:

$$I_n^{\mathrm{r}}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} hf(a+kh), \qquad h = (b-a)/n$$

En Scilab, on peut écrire une fonction qui calcule $I_n^{\mathrm{r}}(f)$ comme ceci :

```
function I=int_rectangle(f,a,b,n)
h = (b-a)/n;
c = linspace(a, b-h, n);
I = sum(f(c)) * h;
endfunction
```

Comparer les vitesses de convergence de ces méthodes sur les fonctions $g(t) = 1/(1+x^2)$ sur $[-1,1]$ et $f(t) = \sqrt{t}$ sur $[0,1]$. On tracera l'erreur commise en fonction de $n \in \{1,\dots,100\}$ dans une échelle logarithmique [1]

$$E(f,n) := \left| I_n^{\mathrm{r}}(f) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right|.$$

Méthode de Gauss

On rappelle qu'étant donnés $n+1$ points distincts $x_0,\dots,x_n$ de $[-1,1]$, il existe une unique famille de poids $w_0,\dots,w_n \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on ait

$$\int_{-1}^{1} P(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} w_i P(x_i). \tag{1}$$

Démonstration. Cette égalité est linéaire, et elle est donc vraie sur $\mathbb{R}_n[X]$ ssi elle est vraie sur la base des polynômes de Lagrange $(\ell_i)_{0\le i\le N}$, qui vérifie $\ell_i(x_j) = \delta_{i,j}$. Or, avec $P = \ell_i$ on obtient $w_i = \int_{-1}^{1} \ell_i(x)\mathrm{d}x$, ce qui définit uniquement les poids. $\square$

La méthode d'intégration de Gauss consiste à remarque que, si l'on choisit bien les points $x_0,\dots,x_n$, la formule (1) sera exacte sur $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$. Dans l'exercice suivant, on calcule les points et les poids de Gauss en utilisant la méthode de Golub–Welsch.

Exercice 2. On rappelle que les polynômes de Legendre (L_n) forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ orthogonale pour la norme Hilbertienne $\|.\|_{\mathrm{L}^2([-1,1])}$, et sont définis par relation

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x), \qquad L_{-1} = 0, L_0 = 1.$$

1. On utilisera la fonction `plot2d`("ll", x, y) — l'argument "ll" signifie que l'échelle est logarithmique. On pourra utiliser `legend` et `xtitle` pour ajouter des légendes et un titre à la figure. Ne pas hésiter à utiliser `help` *commande* pour plus d'information sur une fonction scilab.

On définit $M_n = L_n / \|L_n\|_{\mathrm{L}^2([-1,1])}$, et en utilisant l'expression de la norme de L_n, on peut vérifier que M_n vérifie la relation de récurrence suivante :

$$c_{n+1}M_{n+1}(x) = xM_n(x) - c_nM_{n-1}(x) \qquad c_n = \left(n^2/(4n^2-1)\right)^{1/2} \tag{2}$$

1. Montrer que l'on peut résumer les équations (3) entre 1 et n sous forme matricielle :

$$xM(x) = TM(x) + c_{n+1}M_{n+1}(x)e_n \tag{3}$$

$$\text{où } M(x) = \begin{pmatrix} M_0(x) \\ M_1(x) \\ \vdots \\ M_n(x) \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & & & \\ c_1 & 0 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-1} & 0 & c_n \\ & & & c_n & 0 \end{pmatrix}.$$

En déduire que $M_{n+1}(x) = 0$ ssi x est une des valeurs propres de la matrice tridiagonale T apparaissant dans cette équation.

Pour la suite, on notera $x_0 \leq \ldots \leq x_n$ les valeurs propres de T, et $v_0, \ldots, v_n$ des vecteurs propres correspondants. Montrer que v_i peut s'écrire sous la forme :

$$v_i = \alpha_i \cdot (M_0(x_i), \ldots, M_n(x_i)) \qquad (\alpha_i \neq 0) \tag{4}$$

2. On va maintenant déterminer les poids à utiliser dans la méthode de Gauss à partir des vecteurs propres v_i. On rappelle que la méthode de Gauss est exacte pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$. En particulier, pour tout $P = M_iM_j$ avec $0 \leq i, j \leq n$, on doit avoir

$$\delta_{ij} = \int_{-1}^{1} M_i(x)M_j(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n+1} w_k M_i(x_k)M_j(x_k)$$

Montrer que cette identité peut s'écrire matriciellement sous la forme $\mathrm{Id} = P^tWP$ où

$$W = \begin{pmatrix} w_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & w_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \ldots & & w_{n+1} \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} M_0(x_1) & \ldots & M_n(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ M_0(x_{n+1}) & \ldots & M_n(x_{n+1}) \end{pmatrix}$$

Puis en déduire que $W^{-1} = PP^t$, et que $\frac{1}{w_i} = \sum_{k=0}^{n}[M_k(x_i)]^2$. Finalement, montrer la formule suivante, où v_i est le vecteur propre défini en (4).

$$w_i = 2\frac{(v_i)_0^2}{\sum_{k=0}^{n}(v_i)_k^2} \tag{5}$$

3. En utilisant la formule (5), écrire une fonction `gauss_legendre` qui retourne les noeuds et les poids de la méthode de Gauss à n points. Comparer la vitesse de convergence de l'intégration numérique par méthode de Gauss et méthode de Simpson sur la fonction g de l'exercice 1, et pour :

$$h(x) = \exp(x) \text{ sur } [-1,1] \qquad\qquad k(x) = \frac{1}{1+25x^2} \text{ sur } [-1,1].$$