**Calcul scientifique** 27 janvier 2014

## TP 11: Équations différentielles ordinaires. Existence.

**Exercice 1.** *Théorème d'explosion en temps fini.* Soit $y : I \subseteq \mathbb{R}^d$ une solution *maximale* d'une équation différentielle autonome $y'(t) = F(y(t)), y(0) = y_0$, où $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est localement lipschitzienne.

*1.* Démontrer que l'intervalle $I$ est ouvert.

*2.* Supposons que $I = ]a, b[$ avec $b < +\infty$, et qu'il existe un compact $K$ tel que $y(t)$ reste dans $K$ pour $t$ dans $[t_0, b[$. Montrer alors que $y$ est Lipschitzienne sur $[t_0, b[$. En déduire que $y$ admet une limite en $b$.

*3.* Appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour aboutir à une contradiction (un tel compact $K$ ne peut pas exister).

*4.* En déduire : $\limsup_{t\to b} \|y(t)\| = +\infty$

**Exercice 2.** *Existence globale.* On considère le système différentiel suivant, modélisant une population animale divisée en juvéniles et adultes :

$$\begin{cases} J'(t) = \alpha A(t) - J(t) \\ A'(t) = J(t) - \beta A^2(t) \\ (J, A)(0) = (J_0, A_0), \end{cases}$$

avec $J_0, A_0 \geq 0$ et $\alpha > \beta > 0$.

*1.* Donner une interprétation de ce modèle.

*2.* Démontrer l'existence locale de solutions.

*3.* Montrer que $J$ et $A$ restent toujours positifs.

*4.* On note $\Phi(j, a) = \frac{1}{2}(j - \beta a^2)^2 + \frac{\beta}{3}a^3 - \frac{\alpha}{2}a^2$. Montrer que la fonction $t \mapsto \Phi(J(t), A(t))$ est strictement décroissante.

*5.* En déduire que les trajectoires de l'EDO sont bornées, puis qu'elles existent en tout temps.