Calcul scientifique 28 janvier 2014

TP 10: Équations différentielles ordinaires.

Exercice 1. *Oscillateur harmonique*. On rappelle qu'un oscillateur harmonique est par l'équation différentielle $q''(t) + q(t) = 0$. En posant $p = q'$, ce système devient un système d'équations d'ordre 1 :

$$\begin{cases} p'(t) + q(t) = 0 \\ p(t) - q'(t) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

On notera E l'énergie totale du système, i.e. $E(p, q) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2$. Le but de cet exercice est d'illustrer la non-conservation d'énergie par le schéma d'Euler, et de présenter une modification du schéma d'Euler qui évite ce phénomène.

1. Écrire une fonction $x =$`euler`(x_0, t_0, t, F), retournant la solution de $x'(t) = F(t, x(t))$ obtenue en utilisant le schéma d'Euler, c'est-à-dire $x_{n+1} = x_n + (t_{n+1} - t_n)F(t_n, x_n)$.
2. Appliquer cette fonction à l'oscillateur harmonique. On posera $x = (p, q)$ et on déduira F du système d'équation (1). Tracer l'évolution de l'énergie E au cours du temps, et illustrer par un diagramme de phase. Expliquer ce phénomène par le calcul de la matrice qui permet de passer de (p_n, q_n) à (p_{n+1}, q_{n+1}) pour un pas de temps τ.
3. On considère le schéma suivant, appelé *schéma d'Euler symplectique* pour l'oscillateur harmonique (on rappelle que $x = (p, q)$) :

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n + (t_{n+1} - t_n)p_n \\ p_{n+1} = p_n - (t_{n+1} - t_n)q_{n+1} \end{cases} \tag{2}$$

   Comparer numériquement l'évolution de l'énergie pour le schéma d'Euler symplectique et le schéma d'Euler.
4. Démontrer que le schéma d'Euler symplectique à pas de temps τ conserve l'énergie modifiée $E_\tau(p, q) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2 - \tau pq)$.

Exercice 2. *Méthode de tir*. On considère un problème d'équations différentielles avec conditions au bord (ce problème est donc différent du problème de Cauchy) :

$$\begin{cases} u'' = f(u') \\ u(0) = 0, u(1) = a \end{cases} \tag{3}$$

où $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est l'application $f(v) = -(1 + \alpha(v)v)$, avec $\alpha(v) = \max(1, |v|)$. L'équation différentielle $u'' = f(u')$ modélise la chute d'un corps soumis à une force de pesanteur constante et à une force de frottement qui est linéaire à petite vitesse ($|v| \le 1$) et quadratique à grande vitesse ($|v| \ge 1$). Étant donné $\lambda \in \mathbb{R}$, on notera u_λ la solution au problème de Cauchy $u''_\lambda = f(u'_\lambda)$ avec $u(0) = 0$, $u'(0) = \lambda$. Dans la suite, on admettra que les solutions maximales de l'équation différentielle $v' = f(v)$ sont définies sur $[0, 1]$.

1. Montrer si $v_i : I_i \to \mathbb{R}^d$ $(i = 1, 2)$ sont des solutions de $v_i'(t) = f(v_i(t))$ avec $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ localement lipschitzienne, et $v_1(t_0) = v_2(t_0)$ $(t_0 \in I := I_1 \cap I_2)$, alors $v_1|_I = v_2|_I$. (Indication : montrer que $K = \{t \in I; v_1(t) = v_2(t)\}$ est ouvert et fermé.)
2. Montrer que si $v_i : [0, 1] \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ vérifient $v_i'(t) = f(v_i(t))$ pour tout t dans $[0, 1]$ et $v_1(t_0) > v_2(t_0)$ pour un certain t_0 dans $[0, 1]$, alors $v_1 > v_2$ sur $[0, 1]$.
3. Montrer que l'application $\Phi : \lambda \mapsto u_\lambda(1)$ est continue et strictement croissante, et donc bijective sur son image. Écrire une fonction `Phi`(λ) en utilisant la fonction `ode` de Scilab.
4. Déterminer numériquement les bornes de $\Phi(\lambda)$ en $\pm\infty$. Résoudre le système (3) avec conditions au bord par dichotomie.