# TP 1: Interpolation et approximation polynômiale

On considère l'espace de Hilbert $H := \mathrm{L}^2([-1,1], w)$, où $w$ est la fonction constante égale à un. Le polynôme de Legendre de degré $n$ est défini par la formule :

$$L_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left[(x^2-1)^n\right],$$

**Exercice 1.** *Quelques propriétés.* ***1.*** Par intégration par partie, établir la relation

$$\langle L_n | P \rangle_H = (-1)^n \langle \ell_n | P^{(n)} \rangle_H \qquad \text{où } \ell_n(x) = \frac{1}{2^n n!}(x^2-1)^n$$

En déduire que $(L_n)$ est une famille de polynômes orthogonaux.

***2.*** En utilisant la relation ci-dessus, montrer que $\|L_n\|_H = \sqrt{2/(2n+1)}$. On pourra se servir de la formule de Wallis :

$$\int_0^1 (1-x^2)^n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

***3.*** Montrer l'égalité $(x^2-1)r_n'(x) = 2xnr_n(x)$, où $r_n(x) = (x^2-1)^n$. En différentiant $(n+1)$ fois cette égalité avec la règle de Leibnitz, démontrer que

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

En déduire que les polynômes $P_n$ sont des valeurs propres d'un certain opérateur. Montrer que cet opérateur que est auto-adjoint (pour $\langle .|. \rangle_H$).

**Exercice 2.** *Matrice de Hilbert.* Dans le cas d'une matrice carrée symétrique $A$, le *conditionnement* est défini par $\mathrm{cond}(A) = |\lambda_{max}(A)/\lambda_{min}(A)| \geq 1$. On rappelle également que pour une matrice symétrique, la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de $A$ est égale au minimum (resp. au maximum) du quotient de Rayleigh $R_A(x) = \frac{\langle Ax|x \rangle}{\|x\|^2}$, où $\langle .|. \rangle$ est le produit scalaire standard et $\|.\|$ la norme induite.

***0.*** On note $x_m$ (resp. $x_M$) le vecteurs propres unitaires de $A$ correspondant aux valeurs propres minimale de $A$ (resp. maximale), et $x_\varepsilon = x_m + \varepsilon x_M$, $b_\varepsilon = Ax_\varepsilon$. Montrer :

$$\frac{\|x_\varepsilon - x_0\|}{\|x_0\|} = \mathrm{cond}(A) \frac{\|b_\varepsilon - b_0\|}{\|b_0\|}, \text{ où } x_0 = x_\varepsilon|_{\varepsilon=0}, \ b_0 = b_\varepsilon|_{\varepsilon=0}.$$

Interpréter en terme de stabilité de la solution du système linéaire $Ax = b$.

On appelle *matrice de Hilbert* $(M_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ la matrice carrée dont les entrées sont

$$M_{i,j} = \int_{[-1,1]} x^{i+j} \mathrm{d}x.$$

Le but de cet exercice est de montrer que la matrice de Hilbert est mal conditionnée, et plus précisément, que $\mathrm{cond}(M)$ tend rapidement vers $+\infty$ avec $n$.

*1.* Montrer qu'un polynôme $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ est la projection orthogonale d'une fonction $f \in \mathrm{L}^2([-1,1])$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si le vecteur colonne $(a_0, \dots a_n)^t$ vérifie l'équation

$$Ma = \left( \int_{[-1,1]} x^i f(x) \mathrm{d}x \right)_{0 \leq i \leq n}.$$

*2.* Montrer que pour un polynôme $P$ de coefficients $a$ on a $\langle a | Ma \rangle = \|P\|^2_{\mathrm{L}^2([-1,1])}$.

*3.* En appliquant l'égalité du dessus au polynôme de Legendre $L_n$, majorer la valeur propre $\lambda_{min}(M)$ (Indication : $\|a\| \geq |a_n|$.)

*4.* En appliquant l'égalité à un autre polynôme, montrer que $\lambda_{max}(M) \geq 2$. En déduire une borne inférieure sur $\mathrm{cond}(M)$.

*5.* Question subsidiaire : illustrer numériquement l'instabilité de l'application $b \mapsto M^{-1}b$.

**Exercice 3.** *Optimalité du polynôme de Tchebychev.* Soit $t_n = 2^{-n} T_n$, où $T_n$ est le $n$ième polynôme de Tchebychev défini par la relation $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ pour $x \in [-1,1]$. Le but de cet exercice est de démontrer qu'il n'existe pas de polynôme $P$ de $\mathbb{R}_n[X]$ unitaire et tel que $\|P\|_{\mathcal{C}^0([-1,1])} < 2^{-(n+1)} = \|t_{n+1}\|_{\mathcal{C}^0([-1,1])}$.

*1.* Calculer les points $(x_k^{\pm})$ où $T_n$ vaut $\pm 1$.

*2.* Démontrer le résultat en raisonnant par l'absurde (Indication : montrer que si $P$ satisfaisait l'inégalité du dessus, alors $T_n - P$ devrait avoir $n+1$ racines).

**Exercice 4.** *Différences diviséees et phénomène de Runge.* Dans cet exercice on propose d'implémenter un algorithme de construction du polynôme de Lagrange dans la base de Newton. On s'en sert pour illustrer numériquement le phénomène de Runge.

*1.* Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction qu'on souhaite approcher, et $x_0, \dots, x_n$ dans $[a,b]$. On note $f[x_0, \dots, x_k]$ le coefficient dominant du polynôme d'interpolation de $f$ en les points $x_0, \dots, x_k$ (qu'on notera $J_{x_0,\dots,x_k} f$). Démontrer par récurrence la formule

$$J_{x_0,\dots,x_n} f = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \dots, x_k](x - x_0) \dots (x - x_k).$$

*2.* Démontrer la relation de récurrence pour $k \geq 1$ :

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}.$$

*3.* Étant donné une famille de $N$ réels $x_1, \dots, x_n$, on considère un polynôme $P$ sous la forme suivante : $P(X) = a_0 + a_1(X - x_1) + a_2(X - x_1)(X - x_2) + \dots + a_n(X - x_1) \dots (X - x_n)$. Écrire une fonction `lagrange_horner` qui, étant donnés deux listes de réels $(x_i)$, $(a_i)$ et $x$ retourne la valeur de $P(x)$ (et telle que le nombre d'opérations effectuées soit $\mathrm{O}(n)$).

*4.* Écrire une fonction `lagrange_newton` qui, étant donnés deux vecteurs $(x_i)$ et $(f_i)$ (avec $f_i = f(x_i)$) retourne les coefficients du polynôme de Lagrange de $f$ dans la base $1, \dots, (X - x_1), (X - x_1)(X - x_2), \dots$.

*5.* Se servir des fonction `lagrange_newton` et `lagrange_horner` pour afficher quelques polynomes d'interpolation de Lagrange des fonctions $f : x \mapsto \cos(x)$, $g : x \mapsto \frac{1}{1+25x^2}$, pour des points d'interpolation espacés régulièrement sur le segment $[-1,1]$. Comment expliquer ce phénomène (appelé phénomène de Runge) ?

*6.* Réaliser les mêmes calculs en utilisant les points de Tchebychev.