
TP 1: Interpolation et approximation polynômiale

On considère l'espace de Hilbert $H := L^2([-1, 1], w)$, où w est la fonction constante égale à un. Le polynôme de Legendre de degré n est défini par la formule :

$$L_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n],$$

Exercice 1. *Quelques propriétés.* 1. Par intégration par partie, établir la relation

$$\langle L_n | P \rangle_H = (-1)^n \langle \ell_n | P^{(n)} \rangle_H \quad \text{où } \ell_n(x) = \frac{1}{2^n n!} (x^2 - 1)^n$$

En déduire que (L_n) est une famille de polynômes orthogonaux.

2. En utilisant la relation ci-dessus, montrer que $\|L_n\|_H = \sqrt{2/(2n+1)}$. On pourra se servir de la formule de Wallis :

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

3. Montrer l'égalité $(x^2 - 1)r'_n(x) = 2xnr_n(x)$, où $r_n(x) = (x^2 - 1)^n$. En différentiant $(n+1)$ fois cette égalité avec la règle de Leibnitz, démontrer que

$$(1-x^2)P'_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

En déduire que les polynômes P_n sont des valeurs propres d'un certain opérateur. Montrer que cet opérateur est auto-adjoint (pour $\langle \cdot | \cdot \rangle_H$).

Exercice 2. *Matrice de Hilbert.* Dans le cas d'une matrice carrée symétrique A , le *conditionnement* est défini par $\text{cond}(A) = |\lambda_{\max}(A)/\lambda_{\min}(A)| \geq 1$. On rappelle également que pour une matrice symétrique, la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de A est égale au minimum (resp. au maximum) du quotient de Rayleigh $R_A(x) = \frac{\langle Ax | x \rangle}{\|x\|^2}$, où $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est le produit scalaire standard et $\|\cdot\|$ la norme induite.

0. On note x_m (resp. x_M) les vecteurs propres unitaires de A correspondant aux valeurs propres minimale de A (resp. maximale), et $x_\varepsilon = x_m + \varepsilon x_M$, $b_\varepsilon = Ax_\varepsilon$. Montrer :

$$\frac{\|x_\varepsilon - x_0\|}{\|x_0\|} = \text{cond}(A) \frac{\|b_\varepsilon - b_0\|}{\|b_0\|}, \quad \text{où } x_0 = x_\varepsilon|_{\varepsilon=0}, \quad b_0 = b_\varepsilon|_{\varepsilon=0}.$$

Interpréter en terme de stabilité de la solution du système linéaire $Ax = b$.

On appelle *matrice de Hilbert* $(M_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ la matrice carrée dont les entrées sont

$$M_{i,j} = \int_{[-1,1]} x^{i+j} dx.$$

Le but de cet exercice est de montrer que la matrice de Hilbert est mal conditionnée, et plus précisément, que $\text{cond}(M)$ tend rapidement vers $+\infty$ avec n .

1. Montrer qu'un polynôme $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ est la projection orthogonale d'une fonction $f \in L^2([-1, 1])$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si le vecteur colonne $(a_0, \dots, a_n)^t$ vérifie l'équation

$$Ma = \left(\int_{[-1,1]} x^i f(x) dx \right)_{0 \leq i \leq n}.$$

2. Montrer que pour un polynôme P de coefficients a on a $\langle a | Ma \rangle = \|P\|_{L^2([-1,1])}^2$.
3. En appliquant l'égalité du dessus au polynôme de Legendre L_n , majorer la valeur propre $\lambda_{\min}(M)$ (Indication : $\|a\| \geq |a_n|$.)
4. En appliquant l'égalité à un autre polynôme, montrer que $\lambda_{\max}(M) \geq 2$. En déduire une borne inférieure sur $\text{cond}(M)$.
5. Question subsidiaire : illustrer numériquement l'instabilité de l'application $b \mapsto M^{-1}b$.

Exercice 3. Optimalité du polynôme de Tchebychev. Soit $t_n = 2^{-n}T_n$, où T_n est le n ème polynôme de Tchebychev défini par la relation $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ pour $x \in [-1, 1]$. Le but de cet exercice est de démontrer qu'il n'existe pas de polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ unitaire et tel que $\|P\|_{C^0([-1,1])} < 2^{-(n+1)} = \|t_{n+1}\|_{C^0([-1,1])}$.

1. Calculer les points (x_k^\pm) où T_n vaut ± 1 .
2. Démontrer le résultat en raisonnant par l'absurde (Indication : montrer que si P satisfaisait l'inégalité du dessus, alors $T_n - P$ devrait avoir $n + 1$ racines).

Exercice 4. Différences divisées et phénomène de Runge. Dans cet exercice on propose d'implémenter un algorithme de construction du polynôme de Lagrange dans la base de Newton. On s'en sert pour illustrer numériquement le phénomène de Runge.

1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qu'on souhaite approcher, et x_0, \dots, x_n dans $[a, b]$. On note $f[x_0, \dots, x_k]$ le coefficient dominant du polynôme d'interpolation de f en les points x_0, \dots, x_k (qu'on notera $J_{x_0, \dots, x_k} f$). Démontrer par récurrence la formule

$$J_{x_0, \dots, x_n} f = \sum_{k=0}^n f[x_0, \dots, x_k] (x - x_0) \dots (x - x_k).$$

2. Démontrer la relation de récurrence pour $k \geq 1$:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}.$$

3. Étant donné une famille de N réels x_1, \dots, x_n , on considère un polynôme P sous la forme suivante : $P(X) = a_0 + a_1(X - x_1) + a_2(X - x_1)(X - x_2) + \dots + a_n(X - x_1) \dots (X - x_n)$. Écrire une fonction `lagrange_horner` qui, étant donnés deux listes de réels (x_i) , (a_i) et x retourne la valeur de $P(x)$ (et telle que le nombre d'opérations effectuées soit $O(n)$).
4. Écrire une fonction `lagrange_newton` qui, étant donnés deux vecteurs (x_i) et (f_i) (avec $f_i = f(x_i)$) retourne les coefficients du polynôme de Lagrange de f dans la base $1, \dots, (X - x_1), (X - x_1)(X - x_2), \dots$.
5. Se servir des fonction `lagrange_newton` et `lagrange_horner` pour afficher quelques polynômes d'interpolation de Lagrange des fonctions $f : x \mapsto \cos(x)$, $g : x \mapsto \frac{1}{1+25x^2}$, pour des points d'interpolation espacés régulièrement sur le segment $[-1, 1]$. Comment expliquer ce phénomène (appelé phénomène de Runge) ?
6. Réaliser les mêmes calculs en utilisant les points de Tchebychev.