TP 7: Équation aux dérivées partielles paraboliques

Discrétisation du Laplacien On considère l'opérateur Laplacien sur un segment $[a, b]$ défini par $\Delta u = \partial_{xx}u(x)$, où $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On découpe le segment en $n + 1$ intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ où $x_0 = a, x_{n+1} = b$ et $x_1, \dots, x_n$ interpolent linéairement entre a et b , i.e. $x_i = a + \delta x * i$ avec $\delta x = (b - a)/n$. Selon les conditions au bord que l'on choisit, la discrétisation par élément finis du Laplacien change. Pour les conditions au bord de Dirichlet $u(a) = u(b) = 0$, il prendra la forme A_D , tandis que pour les conditions de Neumann $\partial_x u(a) = \partial_x u(b) = 0$ il s'écrira A_N :

$$A_D = \frac{1}{\delta x^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad A_N = \frac{1}{\delta x^2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 1. *Équation de la chaleur.* On considère l'équation de la chaleur sur $[0, 1]$

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = \Delta u(x, t) \\ u(x, 0) = u_0 \end{cases}$$

auquel on rajoutera les conditions au bord de Dirichlet ou de Neumann.

1. Écrire deux fonctions `laplacien_dirichlet` et `laplacien_neumann` qui retourneront la matrice du Laplacien. Ces fonctions prendront en argument a, b et n et retourneront la matrice A , le pas δx , ainsi que le vecteur $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$.
2. Le schéma d'Euler explicite pour l'équation de la chaleur est donné par

$$u_{t+1} = u_t + \delta t A u_t.$$

où A est la matrice du Laplacien (i.e. A_D ou A_N). Montrer que si $2\delta t \leq \delta x^2$ (condition CFL), les itérées (u_t) restent bornées. Visualiser numériquement que l'instabilité du schéma dans le cas contraire.

3. Vérifier numériquement la stabilité du schéma d'Euler implicite $u_{t+1} = u_t + \delta t A u_{t+1}$.
4. En partant de la fonction $u_0(x) = x^2$, comparer l'effet des conditions au bord de Dirichlet et de Neumann. En partant d'une fonction $u_0(x)$ aléatoire (commande `rand`), visualiser l'effet lissant de l'équation de la chaleur.

Exercice 2. *Modèle proie-prédateur 1D.* On s'intéresse au modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra. La fonction $u(t)$ représente la densité de proies et $v(t)$ la densité de prédateurs. Elles sont reliées par l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} u'(t) = 4u(t) - u(t)v(t) \\ v'(t) = -v(t) + u(t)v(t) \end{cases} \quad (1)$$

1. Simuler numériquement ce système.
2. On s'intéresse maintenant à système prenant en compte une dimension d'espace : la densité de population de proies est donnée par $u(x, t)$, celle de prédateurs par $v(x, t)$. Le modèle qu'on considère est le suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = c\partial_{xx}u(x, t) + 4\chi(x)u(x, t) - u(x, t)v(x, t) & (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+ \\ \partial_t v(x, t) = c\partial_{xx}v(x, t) - v(x, t) + u(x, t)v(x, t) & (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+ \\ \partial_x u(0, t) = \partial_x u(1, t) = \partial_x v(0, t) = \partial_x v(1, t) = 1 & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0 \quad v(x, 0) = v_0 & x \in (0, 1) \end{cases}$$

où $\chi(x)$ est la fonction indicatrice de $[0, 1/2]$ et $c = 0, 1$. Donner une interprétation des différents termes de ce système d'équations aux dérivées partielles.

3. Proposer une discrétisation de ce système en vous inspirant de l'exercice précédent, et le simuler numériquement.