TP 6: Systèmes non-linéaires. Méthode de Newton.

La méthode de Newton est utilisée pour trouver une solution d'une équation non-linéaire $\Phi(x) = 0$, où Φ est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1. *Soit $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, et x^* une solution de l'équation $\Phi(x) = 0$. On suppose de plus que la dérivée $\mathrm{D}\Phi(x^*)$ est une matrice symétrique définie positive. Alors, il existe un rayon $r > 0$ et $C > 0$ tel que pour tout x_0 dans la boule $\mathrm{B}(x, r)$,*
(i) la suite $x_{k+1} = x_k - [\mathrm{D}\Phi(x_k)]^{-1}(x_k)$ est bien définie pour tout k ;
(ii) $\|x_{k+1} - x^*\| \leq C \|x_k - x^*\|^2$.

On dit que la vitesse de convergence de la méthode de Newton est quadratique. L'ensemble des points x_0 à partir desquels la méthode de Newton converge vers x^* est appelé «bassin d'attraction» de x^*.

Exercice 1. *EDO non-linéaire avec condition au bord.* On cherche à résoudre l'équation différentielle non-linéaire avec condition au bord suivante :

$$\begin{cases} u''(t) + cu(t)^2 + tu(t) = 6t \\ u(0) = 1, \ u(4) = -1 \end{cases} \tag{1}$$

où c est une constante. Étant donné un pas de temps $h = 4/N$ ($N > 1$), on cherche une approximation de la solution de ce problème, sous la forme d'une suite $(v_i)_{0 \leq i \leq N}$, où la valeur v_i correspond à la valeur approchée de la solution u au temps $h \times i$.

1. En utilisant l'approximation suivante pour la dérivée seconde de la fonction u,

$$u''(h \times i) \simeq \frac{u(h \times (i-1)) - 2u(h \times i) + u(h \times (i+1))}{2h},$$

montrer que la discrétisation de l'équation différentielle (1) avec sa condition au bord est de la forme

$$\begin{cases} (v_0, v_N) = (1, -1) \\ v_{i-1} + \left(2hcv_i + 2ih^2 - 2\right) v_i + v_{i+1} = 12ih^2 \quad \text{pour } 0 < i < N \end{cases}$$

Écrire ce système sous la forme $\Phi_h(v) = 0$, où $v = (v_0, v_1, \ldots, v_N)$, et calculer la dérivée $\mathrm{D}\Phi_h$.

2. Écrire une fonction `newtsol` qui applique la méthode de Newton pour résoudre le système non-linéaire $\Phi_h(v) = 0$, en partant d'une estimation de la solution v^0, i.e.

$$v^{k+1} = v^k - [\mathrm{D}\Phi_h(v^k)]^{-1}\Phi_h(v^k).$$

La fonction prendra en paramètres la constante c, une estimation de la solution initiale v^0, ainsi qu'un nombre d'itérations K, et retournera la solution trouvée ainsi l'erreur $\left\|\Phi_h(v^k)\right\|_2$ pour $k = 0, \ldots, K$.

3. Tester la fonction `newtsol` pour $N = 100$ et $c = 0, 0.02, 0.05$. Comment peut-on expliquer le phénomène observé ?

4. On cherche à résoudre (1) pour $c = 0.1$. Pour cela, on augmente petit à petit le coefficient devant le terme non-linéaire, et on utilise la solution obtenue pour un coefficient c_ℓ comme point de départ v^0 pour $c_{\ell+1} \geq c_\ell$. Par exemple,

```
v = newtsol(0.02, zeros(50,1), 20);
v = newtsol(0.05, v, 20);
v = newtsol(0.1, v, 20);
```

Expliquer qualitativement la différence de comportement avec la question précédente.

Exercice 2. *Bassins d'attraction.* On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dont la formule est donnée par $z \mapsto z^3 - 1$ dans le plan complexe. Cette fonction a trois racines, $1, j, j^2$. Pour tout point de la grille $\{(hi, hj); -N \leq i, j \leq N\}$ où $h = 1/N$, enregister dans une matrice $M(i, j)$ le numéro de la racine vers laquelle converge la méthode de Newton en partant du point initial (hi, hj). Visualiser cette matrice en utilisant la fonction `matplot`.

On peut appliquer la méthode de Newton au gradient d'une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, i.e. $\Phi = \nabla f$, pour trouver un extrémum local de f. La méthode obtenue est également appelé méthode de Newton. Dans l'exercice suivant, nous montrons que les hypothèse classiques du théorème qui garantit la convergence quadratique de la méthode de Newton impliquent une convexité locale de f.

Exercice 3. *Hypothèse de convexité dans la méthode de Newton.* Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, le gradient $\nabla f(0)$ s'annule et que la matrice Hessienne $\mathrm{D}^2 f(0)$ est symétrique définie positive.

1. Étant donnée une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, montrer que $f - \alpha \|.\|^2$ est convexe sur une boule $\mathrm{B}(x^*, r)$ si et seulement si

$$\forall x \in \mathrm{B}(x^*, r), \forall v \in \mathbb{R}^n,\ {}^{\mathrm{t}}v[\mathrm{D}^2 f(x)]v \geq \alpha \|v\|^2$$

On dit alors que la fonction est α fortement-convexe sur $\mathrm{B}(x^*, r)$.

2. Montrer que sous les hypothèses de l'énoncé, il existe un rayon $r > 0$ et $\alpha > 0$ tels que la fonction f est α-fortement convexe sur la boule fermée $\mathrm{B}(0, r)$.