
TP 4: Systèmes linéaires, valeurs propres.

Exercice 1. On cherche à résoudre un système linéaire $Ax = b$, où A est une matrice symétrique définie positive. En pratique, on considèrera la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

qui apparaît dans la discrétisation du problème de Poisson sur un segment avec conditions de Dirichlet¹.

1. Montrer que résoudre $Ax = b$ revient à minimiser la fonction $J(x) := \frac{1}{2}\langle Ax|x\rangle - \langle b|x\rangle$. La méthode de gradient à pas constant consiste à résoudre le système linéaire de manière itérative en cherchant un minimum de J par descente de gradient. Plus précisément, il s'agit de construire une suite d'approximation de la solution de la façon suivante : on part d'un choix de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ arbitraire, puis l'on pose $x_{n+1} = x_n - \tau \nabla J(x_n)$.
2. Programmer la méthode de gradient à pas constant. Tracer le résidu $\|Ax_n - b\|$ en fonction de n pour différentes valeurs de τ . En déduire son ordre.
3. Montrer que cette méthode converge si $0 < \tau < \frac{2}{\lambda_n}$ où λ_n est la plus grande valeur propre de A . Illustrer numériquement la nécessité de cette condition.
4. On s'intéresse maintenant à l'algorithme de gradient à pas optimal. Étant donné un point x , et $v := \nabla J(x)$, calculer explicitement le minimum de $t \mapsto J(x + tv)$. En partant d'un vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque, on posera : $v_n = \nabla J(x_n)$, $t_n = \arg \min_t J(x_n + tv_n)$ et finalement $x_{n+1} = x_n + t_n v_n$.
5. Programmer la méthode de gradient à pas optimal, et comparer son ordre de convergence à celui de la méthode de gradient à pas fixe.

Exercice 2. Dans cet exercice, on considère une matrice carrée symétrique A , dont l'on suppose que la plus grande valeur propre (en valeur absolue) a pour multiplicité 1.

1. On note λ la plus grande valeur propre de A et u un vecteur propre associé. Montrer que, si $\langle u_0|u \rangle > 0$, alors la suite $u_n = \frac{A^n u}{\|A^n u\|}$ converge vers le vecteur $\frac{u}{\|u\|}$.
2. En déduire un algorithme itératif pour calculer la plus grande valeur propre d'une matrice A . Programmer cet algorithme, et déterminer numériquement son ordre sur la matrice A de l'exercice précédent.

1. Il s'agit, étant donné une fonction $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, de trouver $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie $u'' = f$ sur $(0, 1)$ et $u(0) = u(1) = 0$.