TP 2: Intégration numérique, quadrature de Gauss

Références: Chapitre 5 de [1] ; Chapitre X de [3]

Méthode de Newton-Cotes

Exercice 1. *Vitesse de convergence.* Dans cet exercice, on compare quatre méthodes simples d'intégration numérique : la méthode du rectangle, celle du point du milieu, celle des trapèze, et la formule de Simpson.

1. Écrire quatre fonctions `int_rectangle`, `int_midpoint`, `int_trapeze`, `int_simpson` prenant en paramètre la fonction f, les bornes de l'intervalle d'intégration $[a, b]$ et le nombre d'évaluations de f. Par exemple, la méthode des rectangles (à gauche) peut s'écrire :

```
function I=int_rectangle(f,a,b,n)
h = (b-a)/n;
c = linspace(a, b-h, n);
I = sum(f(c)) * h;
endfunction
```

2. Comparer visuellement les vitesses de convergence des méthodes précédente, en échelle log-log, sur les fonctions suivantes

$$g(t) = 1/(1 + x^2) \text{ sur } [-1, 1] \qquad f(t) = \sqrt{t} \text{ sur } [0, 1]$$

Exercice 2. *Ajustement de droite.* Étant donnée un ensemble de points du plan $P := (x_i, y_i)_{1 \leq i \leq N}$, on cherche la droite de la forme $\mathcal{D} := \{y = y_0 + \lambda x; t \in \mathbb{R}\}$ qui approche le mieux P aux moindres carrés. Précisément, on cherche les paramètres $(y_0, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ qui minimisent l'erreur quadratique

$$E_P(y_0, \lambda) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \|y_0 + \lambda x_i - y_i\|^2$$

1. Montrer que cela équivaut à résoudre l'équation $\nabla E_P(y_0, \lambda) = 0$, qui est un système linéaire en λ. Écrire une fonction `linefit` qui, étant donnés deux vecteurs x et y de même taille retourne le couple (y_0, λ) optimal.
2. Utiliser la fonction `linefit` pour calculer les pentes des courbes log-log construites dans l'exercice précédent.

Polynômes orthogonaux et méthode de Gauss

Exercice 3. Dans cet exercice, on va expliquer comment calculer les noeuds et les poids dans la méthode d'intégration numérique de Gauss en utilisant la méthode de Golub-Welsch[2]. On appliquera cet algorithme pour au calcul approché d'intégrales intégrale sur le segment $[-1,1]$.

On rappelle que les polynômes de Legendre (L_n) forment une base de l'espace des polynômes de degré plus petit que n, noté $\mathbb{R}_n[X]$, qui est orthogonale pour la norme Hilbertienne $\|.\|_{\mathrm{L}^2([-1,1])}$. Ils peuvent être définis par la relation de récurrence

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

en prenant pour condition initiale $L_{-1} = 0$ et $L_0 = 1$.

1. On note $M_n = L_n / \|L_n\|_{\mathrm{L}^2([-1,1])}$ la famille orthonormale de polynômes construits à partir des polynômes de Legendre. En admettant que la norme de L_n est $\sqrt{2/(2n+1)}$, montrer la relation de récurrence :

$$c_{n+1}M_{n+1}(x) = xM_n(x) - c_nM_{n-1}(x) \tag{1}$$

où $c_n = (n^2/(4n^2-1))^{1/2}$.

2. Montrer que l'on peut écrire les équations de récurrence (1) entre 1 et n sous la forme suivante :

$$x\begin{pmatrix} M_0(x) \\ M_1(x) \\ \vdots \\ M_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & & & \\ c_1 & 0 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-1} & 0 & c_n \\ & & & c_n & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_0(x) \\ M_1(x) \\ \vdots \\ M_n(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_{n+1}M_{n+1}(x) \end{pmatrix}$$

En déduire qu'un réel x est une racine de P_{n+1} si et seulement si x est une valeur propre de la matrice tridiagonale T apparaissant dans cette équation.

Pour la suite, on notera $x_1 \leq \ldots \leq x_n$ les valeurs propres de T, et $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs propres correspondants. Montrer que v_i peut s'écrire sous la forme :

$$v_i = \alpha_i(M_0(x_i), \ldots, M_n(x_i)) \tag{2}$$

3. Écrire une fonction `racines_legendre` calculant les racines du $n$ième polynôme de Legendre en utilisant la question précédente et la fonction `spec` de Scilab. Vérifier le bon fonctionnement de cette fonction en utilisant la fonction `poly_legendre` définie lors du TD précédent.

4. On va maintenant déterminer les poids à utiliser dans la méthode de Gauss à partir des vecteurs propres v_i. On rappelle que, la méthode de Gauss à $n+1$ points est d'ordre $2n+1$, i.e. pour les poids de Gauss w_i bien choisis, la formule

$$\int_{-1}^{1} Q(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n+1} w_k Q(x_k)$$

est exacte pour tout polynôme de degré $\leq 2n+1$. En particulier, pour tout produit de polynôme de Legendre $Q = M_i M_j$ (avec $0 \leq i, j \leq n$), on a $\deg Q \leq 2n$ et donc

$$\delta_{ij} = \int_{-1}^{1} M_i M_j = \sum_{k=1}^{n+1} w_k M_i(x_k) M_j(x_k)$$

Matriciellement, on a $\mathrm{Id} = M^t W M$ où

$$W = \begin{pmatrix} w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & w_{n+1} \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} M_0(x_1) & \dots & M_n(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ M_0(x_{n+1}) & \dots & M_n(x_{n+1}) \end{pmatrix}$$

En déduire que $\frac{1}{w_i} = \sum_{k=0}^{n} [M_k(x_i)]^2$, puis finalement la formule suivante, où v_i est le vecteur propre défini en (2).

$$w_i = 2 \frac{(v_i)_1^2}{\sum_{k=0}^{n} (v_i)_k^2} \tag{3}$$

5. En utilisant la formule (3), écrire une fonction `gauss_legendre` qui retourne les noeuds et les poids de la méthode de Gauss à n points. Comparer la vitesse de convergence de l'intégration numérique par méthode de Gauss et méthode de Simpson sur la fonction g de l'exercice 1, et pour :

$h(x) = \exp(x)$ sur $[-1, 1]$ $\qquad$ $k(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ sur $[-1, 1]$.

Références

[1] A. Gil, J. Segura, and N.M. Temme. *Numerical methods for special functions.* Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.

[2] G.H. Golub and J.H. Welsch. Calculation of gauss quadrature rules. *Math. Comp*, 23(106) :221–230, 1969.

[3] M. Schatzman. *Analyse numérique : cours et exercices pour la licence.* InterEditions, 1991.