Calcul scientifique et Informatique 24 septembre 2012

TP 1: Interpolation et approximation polynômiale

Références: [2] pages 157–164 pour l'interpolation polynômiale et les polynômes de Legendre ; Chapitre 2 de [1] pour le conditionnement

Interpolation de Lagrange

Exercice 1. *Phénomène de Runge.* Dans cet exercice on propose d'implémenter un algorithme de construction du polynôme de Lagrange dû à Newton (algorithme dit des "différences divisées"). On s'en sert pour illustrer numériquement le phénomène de Runge.

1. Étant donné une famille de N réels $x_1, \ldots, x_n$, on considère un polynôme P sous la forme suivante :

$$P(X) = a_0 + a_1(X - x_1) + a_2(X - x_1)(X - x_2) + \ldots + a_n(X - x_1)\ldots(X - x_n)$$

Écrire une fonction `lagrange_horner` qui, étant donnés deux listes de réels (x_i), (a_i) et x retourne la valeur de $P(x)$.

2. Modifier la fonction `lagrange_horner` pour qu'elle continue à fonctionner si x est une liste de valeur où l'on veut évaluer P.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qu'on souhaite approcher. Écrire explicitement le polynôme P de Lagrange de degré 2 qui coïncide avec f en deux points x_1 et x_2, sous la forme

$$P(X) = a_0 + a_1(X - x_1).$$

4. On admet (cf Lemme 15.3 de [2] pour une démonstration) que le polynôme de Lagrange de f peut s'écrire sous la forme

$$P(X) = f[x_1] + f[x_1, x_2](X - x_1) + f[x_1, x_2, x_3](X - x_1)(X - x_2) + \ldots$$

où les coefficients sont définis par la relation de récurrence

$$f[x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_{n-1}] - f[x_2, \ldots, x_n]}{x_1 - x_n}$$

Écrire une fonction `lagrange_newton` qui, étant donnés deux vecteurs (x_i) et (f_i) (avec $f_i = f(x_i)$) retourne les coefficients du polynôme de Lagrange de f dans la base $1, \ldots, (X - x_1), (X - x_1)(X - x_2), \ldots$.

5. Se servir des fonction `lagrange_newton` et `lagrange_horner` pour afficher quelques polynomes d'interpolation de Lagrange des fonctions $f : x \mapsto \cos(x)$, $g : x \mapsto \frac{1}{1+25x^2}$, pour des points d'interpolation espacés régulièrement sur le segment $[-1, 1]$. Comment expliquer ce phénomène (appelé phénomène de Runge) ?

6. Calculer et afficher le polynôme de Lagrange de la fonction g, pour des points $x_i = \cos\left(\frac{2*i+1}{2n}\pi\right)$ pour $0 \leq i \leq n - 1$ (ces points sont appelés "points de Tchebychev"). Expliquer la différence constatée avec la question précédente.

Polynômes orthogonaux

Étant donné un intervalle $[a,b]$ muni d'une fonction poids $w : [a,b] \to \mathbb{R}^+$, on considère l'espace Hilbertien associé $E := \mathrm{L}^2([a,b],w)$, défini par

$$\mathrm{L}^2([a,b],w) := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ mesurable } ; \int_{[a,b]} f(x)^2 w(x)\mathrm{d}x < +\infty\}$$

Pour toute fonction f et tout degré n dans cet espace on appelle meilleure approximation de f aux moindres carrés un polynôme de degré n qui réalise le minimum :

$$\min_{P\in\mathbb{R}_n[X]} \|f-P\|_{\mathrm{L}^2([a,b],w)} = \min_{P\in\mathbb{R}_n[X]} \int_{[a,b]} \|f(x)-P(x)\|^2 w(x)\mathrm{d}x$$

Quand la fonction poids w est presque partout positive, ce polynôme est unique (et il s'agit de la projection orthogonale de f sur l'espace de dimension finie $\mathbb{R}_n[X]$, prise au sens de la norme $\|.\|_{\mathrm{L}^2([a,b],w)}$). On en déduit que le polynôme P est caractérisé par

$$\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], \quad \langle P|Q\rangle_{\mathrm{L}^2([a,b],w)} = \langle f|Q\rangle_{\mathrm{L}^2([a,b],w)}.$$

Ceci est vérifié si et seulement si P satisfait le système d'équation

$$0 \le k \le n, \quad \langle P|x^k\rangle_{\mathrm{L}^2([a,b],w)} = \langle f|x^k\rangle_{\mathrm{L}^2([a,b],w)}.$$

Autrement dit, dans la base canonique, les coefficients de $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ doivent satisfaire le système suivant d'équations :

$$\sum_{i=0}^n a_i \int_{[a,b]} x^{i+k} w(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} x^k f(x)\mathrm{d}x, \quad 0 \le k \le n \tag{1}$$

Exercice 2. *Conditionnement.* ***1.*** Dans le cas où l'intervalle est $[0,1]$ et le poids est constant égal à 1, écrire le système d'équations (1) sous forme matricielle, c'est-à-dire sous la forme $M_n a = b$, où le vecteur b dépend de la fonction f.

2. Écrire une fonction `hilbert_matrix` qui prends en entrée n et retourne la matrice M_n.

3. Quelle est la norme de la matrice M_n et de son inverse M_n^{-1} ? Illustrer numériquement l'instabilité de $b \mapsto a = M_n^{-1} b$.

Exercice 3. *Polynômes de Legendre.* Le polynôme de Legendre de degré n est défini par la formule suivante :

$$L_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(1-x^2)^n\right],$$

ou de manière équivalente par la formule de récurrence suivante :

$$\begin{cases} L_0(x) = 0, L_1(x) = x \\ (n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x) \end{cases}$$

1. Définir “à la main” les polynômes L_1, L_2, L_3 en utilisant la fonction `poly` de Scilab :

```
x = poly([0 1], 'x', 'coeff'); // retourne le monome 'x'
L1 = x;
L2 = (3 * x^2 - 1)/2;
L3 = (5 * x^3 - 3 * x)/2;
```

On peut évaluer un polynôme en un point, ou en un vecteur de points via la commande `horner`. En utilisant les fonctions `horner`, `linspace` et `plot`, tracer les courbes de L_1, L_2 et L_3 sur $[-1, 1]$.

2. Écrire une fonction récursive `polynome_legendre` qui calcule le polynôme de Legendre de degré n. En déduire une fonction non récursive `polynomes_legendre`, qui retourne les n premiers polynômes de Legendre dans un vecteur de polynômes.

3. Vérifier que les polynômes L_n sont orthogonaux deux à deux pour le produit scalaire induit par $\|.\|_{\mathrm{L}^2([-1,1],w)}$, où w est le poids constant égal à un. Dans la suite, on considère les polynômes normalisés $\bar{L}_n = L_n / \|L_n\|_{\mathrm{L}^2([-1,1],w)}$.

4. Écrire l'analogue du système d'équation (1) dans la base orthonormale des polynômes de Legendre. Que peut-on dire du conditionnement de la matrice qui apparaît ?

5. Montrer que le polynôme de meilleure approximation aux moindres carrés d'une fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ est donné par :

$$P = \sum_{n=0}^{N} \langle \bar{L}_n | f \rangle_{\mathrm{L}^2([-1,1],w)} \bar{L}_n$$

En déduire une fonction `legendre_fit` qui retourne le polynôme de meilleure approximation d'une fonction pour un degré donné. (Pour simplifier les choses, la fonction sera donnée sous la forme de deux listes $X = \mathtt{linspace}(-1, 1, M)$ et $Y = f(X)$, et on approchera l'intégrale définissant $\langle . | . \rangle_{\mathrm{L}^2([-1,1],w)}$ par un produit scalaire discret à déterminer).

6. Appliquer `legendre_fit` à la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+25x^2}$. Tracer la norme $\|.\|_{\mathrm{L}^2([-1,1],w)}$ (resp. la norme infinie) du résidus en fonction du degré du polynôme.

Références

[1] P.G. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.* Masson, 1982.

[2] M. Schatzman. *Analyse numérique : cours et exercices pour la licence.* InterEditions, 1991.