TD 9: Dualité de Fenchel-Rockafellar

Exercice 1. *Adapté de l'examen 2015*. On s'intéresse au problème de minimisation suivant, où A est une matrice à m lignes et n colonnes, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ est convexe et continue et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est convexe et de classe $\mathcal{C}^1$:

$$P = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(Ax) + g(x),$$

1. Démontrer que $P = D$ où $D = \max_{y \in \mathbb{R}^m} -f^*(y) - g^*(-A^T y)$. On suppose que le problème primal admet un minimiseur $\bar{x}$ et le problème dual un maximiseur $\bar{y}$. Démontrer que

$$f(A\bar{x}) + f^*(\bar{y}) - \langle A\bar{x}|\bar{y}\rangle \geq 0,$$
$$g(\bar{x}) + g^*(-A^T\bar{y}) + \langle A\bar{x}|\bar{y}\rangle \geq 0.$$

En utilisant $P = D$, montrer que la somme de ces deux termes est nulle. Déduire que

$$f(A\bar{x}) + f^*(\bar{y}) = \langle A\bar{x}|\bar{y}\rangle,$$
$$g(\bar{x}) + g^*(-A^T\bar{y}) = -\langle A\bar{x}|\bar{y}\rangle.$$

2. Déduire de la question précédente que $-A^T\bar{y} \in \partial g(\bar{x})$, puis que $-A^T\bar{y} = \nabla g(\bar{x})$. Dans le cas $g(x) = \|x - x_0\|_2^2$ (où $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est fixé), donner une relation explicite entre $\bar{y}$ et $\bar{x}$.

Exercice 2. *Régularisation* L^1. On se place dans le même cadre que dans l'exercice précédent, mais on suppose de plus que $f(y) = \|y\|_1 = \sum_{1 \leq i \leq m} |y_i|$ et $g(x) = \frac{1}{2}\|x - x_0\|_2^2$.

1. Démontrer que

$$g^*(x) = \frac{1}{2}\|x + x_0\|_2^2 - \frac{1}{2}\|x_0\|_2^2$$
$$f^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad |y_i| \leq 1 \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

2. En déduire que $D = -\inf_{y \in \mathbb{R}^m, \|y\|_\infty \leq 1} \frac{1}{2}\left\|A^T y - x_0\right\|_2^2 - \frac{1}{2}\|x_0\|^2$.

Définition 1. On appelle *mesure* sur un ensemble compact X tout forme linéaire $\mu : \mathcal{C}^0(X) \to \mathbb{R}$ continue pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Une mesure μ est dite *positive* si $\forall f \in \mathcal{C}^0(X), (f \geq 0 \Longrightarrow \mu(f) \geq 0)$. Enfin, une mesure de probabilité sur X est une mesure positive μ telle que $\|\mu\|_\infty^* = 1$.

Exercice 3. *Dualité de Kantorovich en dimension infinie*. Soient X, Y deux ensembles compacts, μ une mesure de probabilité sur X, ν une mesure de probabilité sur Y, et $c : X \times Y \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère le problème d'optimisation suivant :

$$P := \inf\{-(\langle \mu|\phi\rangle + \langle \nu|\psi\rangle) \mid \phi \in \mathcal{C}^0(X), \psi \in \mathcal{C}^0(Y), \forall (x,y) \in X \times Y,\ \phi(x) + \psi(y) \leq c(x,y)\}.$$

On définit une forme linéaire $\Lambda : \mathcal{C}^0(X) \times \mathcal{C}^0(Y) \to \mathcal{C}^0(X \times Y)$ par $\Lambda(\phi, \psi) = \phi \oplus \psi$ où

$$\phi \oplus \psi : (x,y) \in X \times Y \mapsto \phi(x) + \psi(y).$$

1. Démontrer que $P = \inf_{(\phi,\psi)\in\mathcal{C}^0(X)\times\mathcal{C}^0(Y)} f(\Lambda(\phi,\psi)) + g(\phi,\psi)$, où

$$
\begin{aligned}
&f : \sigma \in \mathcal{C}^0(X\times Y) \mapsto = \begin{cases} 0 & \text{si } \forall (x,y)\in X\times Y, \sigma(x,y)\leq c(x,y) \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \\
&g : (\phi,\psi)\in E\times F \mapsto -(\langle \mu|\phi\rangle + \langle \nu|\psi\rangle).
\end{aligned}
$$

2. Démontrer que les conjuguées de f et g sont données par les expressions :

$$
\begin{aligned}
f^* : \gamma \in (\mathcal{C}^0(X\times Y))^* : \gamma \mapsto \sup_{\sigma\in\mathcal{C}^0(X\times Y),\sigma\leq c} \langle\gamma|\sigma\rangle &= \langle \gamma|c\rangle + \sup_{\delta\in\mathcal{C}^0(X\times Y),\delta\leq 0} \langle\gamma|\delta\rangle \\
&= \begin{cases} +\infty & \text{si } \exists \delta\in\mathcal{C}^0(X\times Y), \delta\geq 0 \text{ t.q. } \langle\gamma|\delta\rangle < 0 \\ \langle\gamma|c\rangle & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
g^* : (\kappa,\lambda)\in(\mathcal{C}^0(X))^*\times(\mathcal{C}^0(Y))^* \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } (\kappa,\lambda) = -(\mu,\nu) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}
$$

3. Soit $\gamma\in(\mathcal{C}^0(X\times Y))^*$ une mesure sur $X\times Y$. On pose[1] $\Pi_X\gamma : \phi\in\mathcal{C}^0(X) = \gamma((x,y)\mapsto \phi(x))$ et de même $\Pi_Y\gamma : \psi\in\mathcal{C}^0(Y)\mapsto\gamma((x,y)\mapsto\psi(y))$. Montrer que

$$
\Lambda^*(\gamma) = (\Pi_X\gamma, \Pi_Y\gamma) \in (\mathcal{C}^0(X))^*\times(\mathcal{C}^0(Y))^*.
$$

4. Déduire des questions précédentes et du théorème de dualité de Fenchel-Rockafellar la relation $P = D$ (appellée dualité de Kantorovich) où

$$
\begin{aligned}
D &:= \max_{\gamma\in\mathcal{C}^0(X\times Y)^*} -g^*(-\Lambda\gamma) - f^*(\gamma) \\
&= \max\{-\langle\gamma|c\rangle \mid \gamma\in\mathcal{C}^0(X\times Y)^* \text{ mesure positive tq } \Pi_X\gamma = \nu \text{ et } \Pi_Y\gamma = \nu\}.
\end{aligned}
$$

1. $\Pi_X\gamma$ (resp. $\Pi_Y\gamma$) est une mesure sur X (resp. Y) appelée *marge* de γ sur X (resp. Y).