
TD 8: Cônes et optimisation

Exercice 1. Soit K un convexe fermé d'un espace de Hilbert E . Pour tout point $p \in K$, l'ensemble $\partial i_K(p)$ est considéré comme un sous-ensemble de E via l'isomorphisme entre E^* et E . Cet ensemble est appelé *cône normal* à K en p .

1. Montrer que $\partial i_K(p) = \{v \in E; \forall q \in K, \langle v|p \rangle \geq \langle v|q \rangle\}$. En utilisant la caractérisation de la projection hilbertienne sur K , montrer que

$$\partial i_K(p) = \{v \in E; p_K(p+v) = p\}. \quad (1)$$

2. *Application* : Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe continue. Montrer que $\bar{p} \in K$ minimise

$$\min_{p \in K} f(p) \quad (2)$$

si et seulement s'il existe un vecteur $w \in \partial f(\bar{p})$ tel que $p_K(\bar{p} - w) = \bar{p}$. (*Indication : utiliser le théorème sur la somme des sous-différentiels*)

3. Nous cherchons maintenant à démontrer que si $p \in K$ et $v \in \partial i_K(p)$ alors $v/\|v\| \in \partial d_K(p)$, ou de manière équivalente que

$$\forall x \in E, d_K(x) \geq d_K(p) + \left\langle \frac{v}{\|v\|} | x - p \right\rangle. \quad (3)$$

- (i) Démontrer que l'inégalité (3) est automatiquement vraie pour les points x tels que $\langle v|x \rangle \leq \langle v|p \rangle$.
- (ii) Soit maintenant $x \notin H := \{x \in E; \langle v|p \rangle \geq \langle v|x \rangle\}$, et soit $x_H = p_H(x)$ la projection orthogonale de x sur le demi-espace H . Montrer que $x_H = x - \left\langle \frac{v}{\|v\|} | x - p \right\rangle \frac{v}{\|v\|}$.
- (iii) En utilisant $K \subseteq H$, démontrer que

$$d_K(x) \geq d_H(x) = \|x - x_H\| = \left\langle \frac{v}{\|v\|} | x - p \right\rangle,$$

puis en conclure que $v/\|v\| \in \partial d_K$.

4. *Application* : Soit $\bar{p} \in K$ un minimiseur de (2).

- (i) Montrer qu'il existe $w \in \partial f(\bar{p})$ tel que $-w \in \partial i_K(\bar{p})$, puis que

$$0 \in \partial(f + \|w\| d_K)(\bar{p}).$$

- (ii) En déduire qu'il existe $\lambda \geq 0$ tel que \bar{p} soit un minimiseur global du problème pénalisé

$$\min_{p \in E} f(p) + \lambda d_K(p).$$

Exercice 2. *Cône engendré.* Soit K un sous-ensemble d'un espace de Banach E . On considère le *cône engendré par K* , qui est l'ensemble défini par

$$\mathbb{R}^+ K = \{\lambda x; \lambda \geq 0, x \in K\}.$$

Le but de l'exercice est de démontrer que si K vérifie les trois conditions (A) K est convexe et fermé (B) K est borné et (C) K ne contient pas l'origine, alors $\mathbb{R}^+ K$ est fermé.

1. On commence par des contre-exemples. Montrer que

- (i) $K = \{x, y \in [0, 1]^2; y \geq x^2\}$ vérifie (A) et (B) mais que \mathbb{R}^+K n'est pas fermé.
- (ii) $K = \{x, y \in (\mathbb{R}_+^*)^2; y \geq 1/x\}$ vérifie (A) et (C) mais que \mathbb{R}^+K n'est pas fermé.
- 2. On suppose désormais que K vérifie les trois conditions (A), (B) et (C), et on cherche à démontrer que \mathbb{R}^+K est fermé. En utilisant le théorème de Hahn-Banach, démontrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in K, \|x\| \geq \varepsilon$.
- 3. Soit $\lambda_i x_i$ une suite d'éléments de \mathbb{R}^+K , définie par $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$ et $x_i \in K$. On suppose que $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i x_i = y \in E$, et il s'agit de démontrer que y est dans K .
 - (i) Montrer qu'on peut extraire de la suite (λ_i) une sous-suite (λ_{i_k}) qui converge vers un réel $\lambda > 0$ (*Indication : on utilisera la question 2. et les conditions (A), (B), (C)*).
 - (ii) En déduire que la suite x_{i_k}/λ_{i_k} converge vers un élément $x \in K$.
 - (iii) En déduire que $y = \lambda x$ appartient à \mathbb{R}^+K et conclure.

Exercice 3. Soit H un espace de Hilbert. On rappelle qu'une fonction $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est α -fortement convexe si elle vérifie une des deux conditions équivalentes :

$$\forall x, y \in \text{dom}(f), \forall \lambda \in [0, 1],$$

$$\frac{\alpha}{2} \lambda(1 - \lambda) \|x - y\|^2 + f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \quad (4)$$

$$\forall x_0 \in E, f_{x_0} : x \in E \mapsto f - \frac{\alpha}{2} \|x - x_0\|^2 \text{ est convexe} \quad (5)$$

1. On suppose que f est α -fortement convexe, et on se donne $v \in \partial f(x_0)$. Montrer que 0 appartient au sous-différentiel $\partial(f - \langle v, \cdot \rangle)(x_0)$, puis que

$$0 \in \partial \left(f - \frac{\alpha}{2} \|\cdot - x_0\|^2 - \langle v, \cdot \rangle \right) (x_0),$$

et en déduire que

$$\forall x \in H, f(x) \geq f(x_0) + \langle v, x - x_0 \rangle + \frac{\alpha}{2} \|x - x_0\|^2.$$

2. Montrer que pour tout $x_0, y_0 \in H$ et tout $v \in \partial f(x_0)$ et $w \in \partial f(y_0)$ on a

$$\|x_0 - y_0\| \leq \alpha \|v - w\|.$$

3. En déduire la même inégalité pour tout $v, w \in H$ et $x_0 \in \partial f^*(v)$ et $y_0 \in \partial f^*(w)$.
4. On note $D = \{v \in E \mid \partial f^*(v) \neq \emptyset\}$. Montrer que f^* est Gâteaux-différentiable sur D puis que l'application $v \in D \mapsto \nabla f^*(v)$ est $(1/\alpha)$ -lipschitzienne.
5. *Application* : Soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ convexe sci minorée. Montrer que $f_\tau : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_\tau(x) = \inf_{z \in E} f(z) + \frac{1}{2\tau} \|x - z\|^2 \quad (\text{où } \tau > 0)$$

est Gâteaux-différentiable en tout point et que $x \in E \mapsto \nabla f_\tau(x)$ est τ -Lipschitz.