TD 7: Fonction support et sous-différentiel

Exercice 1. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, où $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = +\infty$ si $x > 0$ et $g(x) = -\sqrt{x}$ si $x \geq 0$ et $g(x) = +\infty$ si $x < 0$. Montrer que

$$\partial f(0) + \partial g(0) \subsetneq \partial(f+g)(0).$$

Exercice 2. Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Démontrer l'inégalité suivante (montrant une propriété de monotonie du sous-différentiel) :

$$\forall x, y \in \mathrm{dom}(f), \forall \phi \in \partial f(x), \forall \psi \in \partial f(y), \quad \langle \phi - \psi | x - y \rangle \geq 0.$$

Exercice 3. Soient $f_1, \dots, f_N : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $f = \max(f_1, \dots, f_N)$ et soit x_0 un point du domaine de la fonction f. On pose $I(x_0) = \{i \in \{1, \dots, N\} \mid f_i(x_0) = f(x_0)\}$. Démontrer que

$$\bigcup_{i \in I} \partial f_i(x_0) \subseteq \partial f(x_0),$$

$$\text{puis que} \quad \overline{\mathrm{conv}} \left(\bigcup_{i \in I} \partial f_i(x_0) \right) \subseteq \partial f(x_0).$$

Exercice 4. Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction sur un espace vectoriel normé.

1. Montrer que $\phi \in E^*$ appartient à $\partial f(x)$ (où $x \in E$) si et seulement si x est le minimum global de $f - \phi$.
2. En déduire que si f est strictement convexe et semi-continue inférieurement, alors pour tout ϕ dans $\mathrm{dom}(f^*)$ on a $\mathrm{Card}(\partial f^*(\phi)) \leq 1$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe continue.

1. *(Semi-continuité du sous-différentiel)* Soit x_n une suite convergente de limite $x \in \mathbb{R}^n$ et $s_n \in \partial f(x_n)$ une suite convergente de limite $s \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $s \in \partial f(x)$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on définit

$$S = \left\{ s \in \mathbb{R}^n ; \exists x_n \to x, \text{ t.q. } f \text{ dérivable en } x_n \text{ et } \lim_{n \to \infty} \nabla f(x_n) = s \right\}$$

$$K = \overline{\mathrm{conv}} S.$$

   (i) En utilisant la question précédente, démontrer que $K \subseteq \partial f(x)$. Le but des questions suivantes est de montrer l'inclusion réciproque.

   (ii) Soit $v \in \mathbb{R}^n$. Montrer que pour tout $t_n = 1/n$, il existe $v_n \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|v_n - v\| \leq t_n$ et tel que f est différentiable en $x_n = x + t_n v_n$.
   Indication : f est différentiable p.p. $\Longrightarrow \exists y \in \mathrm{B}(x + t_n v, t_n^2)$ tq f différentiable en y. Vérifier alors que $v_n = (x - y)/t_n$ satisfait les hypothèses de la question.

   (iii) En utilisant $\nabla f(x_n) \subseteq \partial f(x_n)$, montrer que

$$f(x_n) - f(x) \leq \langle \nabla f(x_n) | x_n - x \rangle.$$

(iv) Quitte à extraire une sous-suite, on peut suppose que la suite $(\nabla f(x_n))_n$ converge vers un point $s \in S$ (pourquoi ?). Montrer que

$$f^+(x;v) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(x+t_n v) - f(x)}{t_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(x+t_n v_n) - f(x)}{t_n} \leq \lim_{n\to\infty} \langle \nabla f(x_n) | v_n \rangle = \langle s|v \rangle$$

Pour résumer, les trois questions précédente démontrent donc que

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \exists s \in S, f^+(x;v) \leq \langle v|s \rangle.$$

(v) En utilisant un théorème du cours (justifier), on obtient que $f^+(x;v) = \mathrm{h}_{\partial f(x)}(v)$. Déduire des questions précédentes que $\mathrm{h}_{\partial f(x)}(v) \leq \mathrm{h}_K$, puis que $\partial f(x) \subseteq K$. Conclure.

3. *Application.* On suppose qu'il existe un champs de vecteur $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continu tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n, G(x) \in \partial f(x)$. Montrer que f est alors de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 6. Soit S un ensemble non vide d'un espace vectoriel normé E, et $K = \overline{\mathrm{conv}}S$. Il s'agit ici de démontrer que $h_S = h_K$ (autrement dit, la fonction support ne permet pas de distinguer un ensemble de son enveloppe convexe fermée).

1. Montrer que $h_S \leq h_K$.

2. On s'intéresse à l'inégalité réciproque. Commencer par démontrer que pour tout point $x \in \mathrm{conv}(S)$ on a

$$\forall v \in E, \langle x|v \rangle \leq h_S(v),$$

puis en déduire que $h_{\mathrm{conv}(S)} \leq h_S$. Conclure.

3. *Application* Soit $K_1, \ldots, K_n$ des convexes fermés non vides d'un espace vectoriel normé E. Montrer que $h = \max_{1\leq i\leq n} h_{K_i}$ est la fonction support de $K = \overline{\mathrm{conv}}S$ où $S = \cup_{1\leq i\leq n} K_i$.