TD 6: Transformée de Legendre et sous-différentiel

Lorsque E est un espace de Hilbert ou $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\mathrm{eucl}})$ on identifie E^* à E.

Exercice 1. Calculer la conjuguée de Legendre-Fenchel (ainsi que son domaine) des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \exp(x) \qquad g(x) = \sqrt{1+x^2} \qquad h(x) = -\log(x).$$

Étant donnée une matrice symétrique définie positive Q de taille n, calculer F^* où

$$F : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{2}\langle x|Qx\rangle.$$

Exercice 2. Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre, $A : E \to F$ un opérateur linéaire continue et

$$g : y \in F \mapsto \inf\{f(x) \mid x \in E, Ax = y.\}$$

On note $A^* : F^* \to E^*$ l'adjoint de l'opérateur A défini par $A^*\phi = \phi \circ A$. Montrer que

$$\forall \phi \in F^*,\ g^*(\phi) = f^*(A^*\phi).$$

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel normé, $g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe paire, c'est-à-dire que $g(-t) = g(t)$ et soit $f : x \in E \mapsto g(\|x\|)$. Montrer que

$$\forall \phi \in E^*, \quad f^*(\phi) = g^*(\|\phi\|_*).$$

(Indication : dans la définition de f^*, remplacer $\sup_{x\in E} \cdots$ par $\sup_{t\geq 0}\sup_{\|x\|=t} \cdots$)

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel normé et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction convexe 1-lipschitzienne.

1. Montrer que $\mathrm{dom}(f^*)$ est contenu dans la boule unité de E^*.

2. Montrer que pour tout $x \in E$ on a

$$f(x) = \sup_{\phi\in E^*, \|\phi\|_*\leq 1} \langle\phi|x\rangle - f^*(\phi).$$

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel normé et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre telle qu'en tout point x_0 de son domaine, le sous-différentiel $\partial f(x_0)$ est non vide.

1. Montrer que f est égale au suprémum de ses minorantes affines continues.

2. En déduire que f est convexe et semi-continue inférieurement.

Exercice 6. **1.** Trouver toutes les fonctions propres $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ vérifiant l'égalité $f = f^*$.

2. Montrer qu'une fonction convexe $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est affine ssi $\mathrm{Card}(\mathrm{dom}(f^*)) = 1$.

Exercice 7. **1.** Soit E un espace vectoriel normé, $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ convexes. Montrer que

$$\forall x_0 \in E,\ \partial f(x_0) + \partial g(x_0) \subseteq \partial(f+g)(x_0).$$

2. Soit E, F deux espaces vectoriel normés, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, et $A : F \to E$ une application linéaire continue. Soit $A^* : E^* \to F^*$ définie par $A(\phi) = \phi \circ A$ pour $\phi \in E^*$. Montrer que

$$\forall x_0 \in F,\ \partial(f \circ A)(x_0) \supseteq A^* \circ \partial f(Ax_0),$$