TD 5: Séparation des convexes

Exercice 1. Soit E un espace de Hilbert. On rappelle que pour tout convexe fermé C de E et tout $x \notin C$, il existe un (unique) $y \in C$ tel que $\forall z \in C,\ \langle x - y | y - z\rangle \geq 0$.

1 Soit C un convexe fermé de E et x un point de $E \setminus C$. En utilisant la projection orthogonale sur C, montrer qu'il existe un vecteur $v \in E$ tel que

$$\forall z \in C,\ \langle v|z\rangle < \langle v|x\rangle$$

2 Soit A un convexe compact de E et B un convexe fermé de E tq $A \cap B = \emptyset$.

(a) Montrer que $A - B$ est fermé (*Indication : utiliser la compacité de A pour extraire une sous-suite.*) et qu'il ne contient pas 0.

(b) En appliquant la question précédente, montrer qu'il existe $v \in E$ tel que

$$\forall x \in A, y \in B,\ \langle v|x\rangle < \langle v|y\rangle.$$

Exercice 2. Soit C un convexe compact de $\mathbb{R}^n$, et R défini par :

$$R := \inf\{r > 0 \mid \exists x \in \mathbb{R}^n,\ C \subseteq \mathrm{B}(x, r)\}.$$

On appelle *boule circonscrite* à C toute boule fermée de rayon R contenant C.

1 En considérant une suite décroissante (r_i) de limite R et $x_i \in \mathbb{R}^n$ un point tel que $C \subseteq \mathrm{B}(x_i, r_i)$, montrer qu'il existe une boule circonscrite à C.

2 Montrons que le centre de toute boule circonscrite $\mathrm{B}(x, R)$ appartient à C. Par l'absurde, supposons $x \notin C$.

(i) Montrer qu'il existe un vecteur v et $\varepsilon > 0$ tel que $\forall c \in C, \langle v|x\rangle + \varepsilon < \langle v|c\rangle$.

(ii) Obtenir une contradiction en majorant $\|x + tv - c\|^2$ pour t suffisamment petit.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel normé et E^* l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E. Étant donné $A \subseteq E$ on pose $A^\perp := \{\phi \in E^* \mid \forall x \in A,\ \phi(x) = 0\}$. Montrer que $\mathrm{vect}(A)$ est dense dans E si et seulement $A^\perp = \{0\}$.

Exercice 4. *Lemme de Farkas*. Soient $E = \mathbb{R}^n$ et $P_1, \ldots, P_m : E \to \mathbb{R}$ des fonctions affines, i.e.

$$P_i(x) = \langle a_i|x\rangle + b_i.$$

où $a_i \in \mathbb{R}^n$ et $b_i \in \mathbb{R}$. On souhaite montrer qu'exactement une des deux propositions suivantes est vérifiée (c'est-à-dire que (i) est vraie si et seulement si (ii) est fausse) :

(i) Le système d'inégalités $P_i(x) \geq 0$ a une solution.

(ii) Il existe $q_1, \ldots, q_m \geq 0$ tel que $q_1 P_1 + \ldots q_m P_m = -1$.

On admettra le résultat suivant : si $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ sont convexes fermés et disjoints, ils peuvent être séparés au sens large, c'est-à-dire qu'il existe $q \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que

$$\forall (x, y) \in A \times B,\quad \langle q|x\rangle \leq \langle q|y\rangle.$$

1 Montrer qu'il n'est pas possible d'avoir (i) et (ii) simultanément.

2 On suppose la propriété (i) fausse, et on considère $C = \{(P_1(x), \ldots, P_m(x)) \mid x \in E\} \subseteq \mathbb{R}^m$.

(i) Montrer que $K = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \forall i, y_i \geq 0\}$ est convexe, d'intérieur non vide et $C \cap K = \emptyset$.

(ii) En déduire qu'il existe $q \in \mathbb{R}^m$ non nul telle que

$$\forall y \in C, \forall z \in K \ \langle q|y \rangle \leq \langle q|z \rangle$$

(iii) En déduire que pour tout i, $q_i \geq 0$, puis que la forme linéaire $y \mapsto \langle q|y \rangle$ est bornée sur l'espace affine C et donc constante.

(iv) Montrer que la fonction affine $Q = q_1 P_1 + \ldots + q_m P_m$ est constante, conclure.