TD 4: Fonctions convexes

Exercice 1. *(Extrait partiel 2015).* Soit K un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique euclidienne canonique. L'objet de cet exercice est d'étudier en détail la différentiabilité de la fonction distance à K, définie par $\mathrm{d}_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathrm{d}_K(x) = \min_{p\in K} \|x-p\|$. L'ensemble des *projections* de x sur K est noté

$$\Pi_K(x) = \{p \in K;\ \|x-p\| = \mathrm{d}_K(x)\}.$$

1 Donner un exemple de $K \subseteq \mathbb{R}$ non convexe et $x \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{card}\Pi_K(x) \geq 2$.

2 On pose $\phi : x \mapsto \|x\|^2 - \mathrm{d}_K(x)^2$. Montrer que $\phi(x) = \max_{p\in K} 2\langle x|p\rangle - \|p\|^2$, en déduire que la fonction ϕ est convexe.

3 Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $p \in \Pi_K(x)$. Montrer que $\phi(x) = 2\langle x|p\rangle - \|p\|^2$, puis que pour $v \in \mathbb{R}^n$, $\phi(x+tv) - \phi(x) \geq 2t\langle v|p\rangle$, et enfin $\phi^+(x;v) \geq \max_{p\in\Pi_K(x)} 2\langle v|p\rangle$.

4 Soit $v_0 \in \mathbb{R}^n$ fixé et $y_i = x + t_i v_0$ où $t_i = 1/i$ et soit $q_i \in \Pi_K(y_i)$.

(i) Montrer que $\phi^+(x;v_0) \leq \frac{1}{t_i}(\phi(y_i) - \phi(x)) \leq 2\langle q_i|v_0\rangle$.

(ii) Quitte à extraire une sous-suite, on supposes que (q_i) converge vers un point $p_0 \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $p_0 \in \Pi_K(x)$, puis que $\phi^+(x;v_0) \leq 2\langle p_0|v_0\rangle$.

5 Déduire des deux questions précédentes que $\phi^+(x;v) = \max_{p\in\Pi_K(x)} 2\langle v|p\rangle$, puis que ϕ est Gâteaux-différentiable en x seulement si $\Pi_K(x)$ est un singleton.

6 En conclure que l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ ayant plus d'une projection sur K est de mesure nulle.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel normé. Pour cet exercice, on admettra que $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ est convexe si et seulement si son épigraphe strict $\mathrm{epi}_s f := \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} \mid t > f(x)\}$ est convexe. Soient $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ et $g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions admettant une même minorante affine. On définit l'inf-convolution de f et g, notée $f\Box g$, de la façon suivante :

$$(f\Box g)(x) = \inf_{y\in E}(f(y) + g(x-y)).$$

1 Montrer que $f\Box g$ ne prend pas la valeur $-\infty$.

2 Montrer que $\mathrm{epi}_s(f\Box g) = \mathrm{epi}_s(f) \oplus \mathrm{epi}_s(g)$.

3 En déduire que si f et g sont convexe alors $f\Box g$ est convexe.

4 La *τ-régularisée de Moreau-Yosida* d'une fonction convexe minorée $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ est :

$$f_\tau(x) := \inf_{u\in E} f(u) + \frac{1}{2\tau}\|x-u\|^2, \qquad \tau > 0.$$

(i) Montrer que si f est une fonction convexe minorée, f_τ est convexe et partout finie.

(ii) Soit $C \subseteq E := \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe. Calculer les régularisées de Moreau-Yosida de la fonction indicatrice de C, $\iota_C(x) = 0$ si $x \in C$, $\iota_C(x) = +\infty$ sinon.

(iii) Calculer les régularisées de la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$.

(iv) Montrer que si $\tau \leq \tau'$, $f_\tau \geq f_{\tau'}$. En déduire que si $f : E \to \mathbb{R}$ est convexe minorée et continue en x, alors $\lim_{\tau\to 0} f_\tau(x) = \sup_{\tau>0} f_\tau(x) = f(x)$.
(Indication : introduire $u_\tau \in E$ tel que $f(u_\tau) + \frac{1}{2\tau}\|u_\tau - x\|^2 \leq f_\tau(x) + \tau$ et en déduire une borne explicite sur $\|u_\tau - x\|$, puis le résultat.)

Exercice 3. Soient E un espace-vectoriel. On dit que $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ est quasi-convexe lorsque

$$\forall x, y \in E, \forall t \in]0,1[, \quad f(tx + (1-t)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}. \tag{1}$$

1 Montrer qu'une fonction convexe est quasi-convexe, mais que la réciproque est fausse.

2 Montrer que f est quasi-convexe si et seulement si

$$\forall r \in \mathbb{R}, \ \{x \in E, f(x) \leq r\} \text{ est convexe.}$$

3 Soit f quasi-convexe, et $C \subseteq E$ un sous-ensemble convexe.

(i) Montrer que tout minimum local strict de f (sur C) est un minimum global.

(ii) Montrer que tout maximiseur local strict de f sur C est un point extrémal de C, et se trouve donc sur sa frontière ∂C.