TD 3: Fonctions convexes

Exercice 1. On rappelle qu'une fonction $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ est *sous-additive* si $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ pour tout $x, y \in E$ et *positivement* 1*-homogène* si $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour tout $\lambda \geq 0$. Une fonction vérifiant ces deux propriétés est appelée *sous-linéaire*.

1 Montrer qu'une fonction sous-linéaire est convexe (Ainsi, toute norme sur E est convexe.) Réciproque : montrer qu'une fonction convexe et positivement 1-homogène est sous-linéaire.

2 Soit K un compact de E, et E^* le dual topologique de E, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires continues sur E. On définit la fonction support de K par [1]

$$h_K : x^* \in E^* \mapsto \max_{x \in K} \langle x^* | x \rangle.$$

Montrer que cette fonction est sous-linéaire.

3 Soit f une fonction convexe sur E, et $x \in \mathrm{dom}(f)$. On considère $g = f^+(x, .)$. Montrer que g est sous-linéaire.
(Indication : pour la sous-additivité, utiliser $x + \varepsilon(u+v) = \frac{x+2\varepsilon u}{2} + \frac{x+2\varepsilon v}{2}$)

4 Soit g une fonction sous-linéaire telle que $\mathrm{dom}(g) = E$ et $-g(v) = g(-v)$ pour tout $v \in E$. Montrer que g est linéaire.

Définition 1. Une fonction f sur un espace de Hilbert $(H, \|\|)$ est dite α-fortement convexe (où α est une constante strictement positive) si

$$\forall x, y \in \mathrm{dom}(f), \forall \lambda \in [0,1],$$
$$\frac{\alpha}{2}\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2 + f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \qquad (1)$$

Une fonction vérifiant (1) avec $\alpha = -\beta < 0$ est dite β-semiconvexe (c'est une hypothèse moins forte que la convexité).

Exercice 2. Soit $(H, \|\|)$ un espace de Hilbert. Étant donné un fermé K de H, on note $\mathrm{d}_X : H \to \mathbb{R}$ la fonction distance à K, définie par $\mathrm{d}_K(x) = \inf_{z \in K} \|x - z\|$.

1 Montrer que si C est convexe, la fonction d_C est convexe.

2 Montrer que :

(i) f est α-fortement convexe si et seulement si $f - \frac{\alpha}{2}\|.\|^2$ est convexe.
(Indication : commencer par montrer que pour la fonction $f(x) = \frac{\alpha}{2}\|x\|^2$, l'inégalité (1) *est en fait une égalité)*

(ii) f est β-semiconvexe si et seulement si $f + \frac{\beta}{2}\|.\|^2$ est convexe.

3 En utilisant le critère de la question précédente, montrer que si K est un compact de H (non nécessairement convexe) l'application $x \mapsto -\mathrm{d}_K^2(x)$ est 2-semiconvexe. [2]

Exercice 3. Soit $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives. Le but de cet exercice est de montrer la log-concavité de la fonction déterminant. On admet l'énoncé suivant :

Lemme 1. *Soit M une matrice de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont unitaires. Alors,* $\det(M) \leq 1$.

1. Les formes linéaires sur E sont notées comme des vecteurs, avec une étoile en exposant. De plus, pour une forme linéaire $x^* : E \to \mathbb{R}$, et un vecteur $x \in E$ on utilisera la notation $\langle x^* | x \rangle := x^*(x)$, qui rappelle le cadre Hilbertien (et montre la bilinéarité en (x^*, x)).

2. Ainsi, d_K^2 vérifie des propriété de *concavité* plutôt que de convexité.

1 Montrer que si M est une matrice de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont $v_1, \ldots, v_n$, alors $\det(M) \leq \prod_{1\leq i\leq n} \|v_i\|$.

2 En déduire que pour $P = (p_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{S}_n^{++}$, on a $\det(P) \leq \prod_{1\leq i\leq n} p_{ii}$.
Indication : utiliser la décomposition de Cholesky $P = {}^{\mathrm{t}}NN$.

3 En déduire la formule

$$\det(P) = \min_{O\in\mathcal{O}(n)} \prod_{1\leq i\leq n} [{}^{\mathrm{t}}OPO]_{ii}. \tag{2}$$

4 Utiliser (2) pour démontrer la convexité de $M \in \mathcal{S}_n^{++} \mapsto -\log(\det(M))$.

5 *Application :* Pour tout $\alpha > 0$, l'ensemble $\{M \in \mathcal{S}_n^{++}; \det(M) \geq \alpha\}$ est convexe.

Exercice 4. Soir E l'espace des suites réelles sommables muni de la norme $\|x\|_1 = \sum_{i\geq 0} |x_i|$. Le but de cet exercice est d'étudier la différentiabilité de la fonction convexe $f : x \in E \mapsto \|x\|_1$.

1 Soit $x \in E$ une suite telle que $x_n = 0$ pour un certain n. Montrer que $-f^+(x; -e_n) \neq f^+(x; e_n)$; en déduire que l'application $f^+(x; \cdot)$ n'est pas linéaire.

2 Supposons au contraire que $x_n \neq 0$ pour tout n. Il s'agit de montrer que dans ce cas $f^+(x; \cdot)$ est linéaire. Montrer que

$$f^+(x; v) = \sum_{n\geq 0} v_n \sigma_n,$$

où $\sigma_n \in \{-1, 1\}$ est le signe de x_n. En déduire que f est Gâteaux-différentiable en x.
(Indication : utiliser le fait que v sommable implique $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \sum_{n\geq N} |v_n| \leq \varepsilon$)

3 Montrer que f n'est Fréchet-différentiable en aucun point x de E.
(Indication : poser $v^m = (0, 0, \ldots, -2x_m, 0, \ldots) \in E$ et considérer $(f(x+v^m)-f(x))/\|v^m\|_1$.)