## TD 2: Propriétés topologiques des ensembles convexes

### Adhérence et intérieur d'un convexe

**Exercice 1.** **1** Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 1/(1 + x^2)\}$. Montrer que $A$ est fermé, mais que son enveloppe convexe $\mathrm{conv}(A) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ n'est pas fermée.

**2** Montrer que si $A$ est une partie finie d'un espace vectoriel normé, alors $\mathrm{conv}(A)$ est compact.

**3** Montrer que si $A$ est un ouvert d'un espace vectoriel normé, alors $\mathrm{conv}(A)$ est ouvert.

**4** Montrer que si $A$ est une partie d'un espace vectoriel normé $E$, l'adhérence de $\mathrm{conv}(A)$ est le plus petit ensemble convexe fermé contenant $A$.

**Exercice 2.** Soit $K$ un convexe de $E$. En utilisant une proposition du cours, démontrer que $K$ est strictement convexe si et seulement si $\forall x \neq y \in K,\ \frac{1}{2}(x + y) \in \mathrm{int}K$.

### Compacité de l'enveloppe convexe

**Exercice 3.** Soit $E = \{u : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \|u\|_{\ell^1} < +\infty\}$, où $\|u\|_{\ell^1} = \sum_{n\geq 0} u(n)$. On considère

$$A = \left\{\frac{1}{n} e_n \mid n \geq 1\right\} \cup \{0\},$$

où $e_n$ est la suite nulle partout sauf en $n$ et $e_n(n) = 1$. L'ensemble $A$ est compact (pourquoi ?). On dénote $K$ son enveloppe convexe.

**1** Montrer que $u = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\cdot 2^n} e_n$ appartient à l'adhérence de $K$.

**2** En conclure que $K$ n'est pas fermé, donc en particulier non compact.

Un sous-ensemble $A$ d'un espace vectoriel normé est *précompact* si pour tout $\eta > 0$, il existe un sous-ensemble fini $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq A$ tel que $A \subseteq \cup_{i=1}^n \mathrm{B}(x_i, \eta)$ (i.e. $\forall a \in A, \exists i,\ \ \|x_i - a\| \leq \eta$). On rappelle que :

**Proposition 1.** *Soit $E$ un espace de Banach. Alors $A \subseteq E$ compact $\iff$ $A$ fermé et précompact.*

**Exercice 4.** Soit $A$ un sous-ensemble compact d'un espace de Banach $(E, \|\|)$ et $K$ l'enveloppe convexe de $A$. Le but de cet exercice est de montrer que l'adhérence de $K$ est compacte.

**1** Soit $\eta > 0$. Par compacité de $A$, il existe $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq A$ tel que $A \subseteq \cup_{i=1}^n \mathrm{B}(x_i, \eta)$. On considère le simplexe

$$\Delta = \left\{\lambda \in \mathbb{R}_+^n ; \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\right\},$$

et l'application

$$F : \Delta \to K,\ \lambda \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$

Montrer que tout point $x$ dans $K = \mathrm{conv}(A)$, il existe $\lambda \in \Delta$ tel que $\|F(\lambda) - x\| \leq \eta$.

**2** Montrer que l'ensemble $L = F(\Delta)$ est compact, et qu'il existe donc un sous-ensemble fini $\{y_1, \dots, y_N\}$ de $L$ tel que $L \subseteq \cup_{i=1}^N \mathrm{B}(y_i, \eta)$. Montrer que $K \subseteq \cup_{i=1}^N \mathrm{B}(y_i, 2\eta)$.

**3** En déduire que $K$ est précompact, puis que son adhérence est compacte.

## Intérieur algébrique (cœur) et jauge

**Exercice 5.** Soit $A$ un sous-ensemble d'un espace vectoriel $E$. Un point $x$ appartient à l'*intérieur algébrique* de (où *cœur*) de $A$ si

$$\forall v \in E, \exists t_0 > 0, \forall t \in [0, t_0],\ x + tv \in A.$$

On note $\mathrm{coeur}(A)$ l'intérieur algébrique de $A$.

**1** Montrer que pour toute partie $A$ d'un espace vectoriel normé $E$, $\mathrm{int}(A) \subseteq \mathrm{coeur}(A)$.

**2** Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 \text{ ou } y \leq 0\}$. Montrer que l'origine $(0, 0)$ est dans le coeur de $A$, mais qu'elle n'est pas dans l'intérieur de $A$.

**3** On considère $A$ un convexe d'intérieur non-vide dans un espace-vectoriel normé. Le but de cette question est de montrer l'inclusion réciproque $\mathrm{coeur}(A) \subseteq \mathrm{int}(A)$. Supposons par exemple $\mathrm{B}(x_0, r) \subseteq A$, et considérons un point $x \in \mathrm{coeur}(A)$. Montrer que :

(i) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $y := x + \varepsilon(x - x_0) \in A$ ;

(ii) Pour $0 \leq t < 1$, $x_t := (1 - t)x_0 + ty \in \mathrm{int}(A)$ (on utilisera une proposition du cours).

En déduire que $x \in \mathrm{int}(A)$, puis que $\mathrm{int}(A) = \mathrm{coeur}(A)$.

**4** (**) Montrer que si $\dim E < +\infty$ et si $A$ est convexe non vide, alors $\mathrm{int}(A) = \mathrm{coeur}(A)$. *(Indication : supposer $E = \mathbb{R}^n$, poser $V = \{(\pm 1, \ldots, \pm 1)\}$ les sommets du cube unité $C := \mathrm{conv}(V)$, et montrer que $0 \in \mathrm{int}C$. Utiliser la propriété définissant $x \in \mathrm{coeur}(A)$ dans les directions $v \in V$, et en déduire $x + tC \subseteq A$ pour $A$ suffisamment petit. Conclure.)*

**Exercice 6.** Soit $E$ un espace vectoriel et $K \subseteq E$ un convexe contenant l'origine. On appelle *jauge* de $K$ la fonction $j_K : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par

$$j_K(x) = \inf \{t > 0 \mid x \in tK\}.$$

**1** Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $B$ la boule unité. Montrer que $j_B = \|.\|$.

**2** Soit $E$ un espace vectoriel, $K \subseteq E$ un convexe contenant l'origine et $j := j_K$. Montrer :

(i) $\forall x \in E, \forall t \geq 0,\ j(tx) = tj(x)$ (homogénéité) ;

(ii) $\forall (x, y) \in E,\ j(x + y) \leq j(x) + j(y)$ (sous-additivité).

**3** Montrer que $j_K$ est finie si et seulement si $0 \in \mathrm{coeur}(K)$.

**4** Montrer que si $K = -K$, $0 \in \mathrm{coeur}(K)$ et que $K$ est *algébriquement borné* (c'est-à-dire que pour tout $v \in E$, l'ensemble $\{t \in \mathbb{R} \mid tv \in K\} \subseteq \mathbb{R}$ est borné), alors $j_K$ est une norme.

**5** On suppose que $E$ est un espace vectoriel normé et que $B(0, r) \subseteq K$.

(i) Montrer que $j_K(x) \leq \|x\| / r$ ;

(ii) En déduire que $j_K$ est continue en l'origine, puis qu'elle est continue sur l'espace entier $E$. *(Indication : utiliser la sous-linéarité.)*