TD 10: Opérateur proximal

La seule propriété de l'opérateur proximal que l'on utilisera est l'équivalence $y = \mathrm{prox}_\gamma f(x) \iff x \in (\mathrm{id} + \gamma \partial f)(y)$.

Exercice 1. Soit E un espace de Hilbert, qu'on identifie à son dual. Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe propre sci.

1. Montrer la *décomposition de Moreau*

$$\forall x \in E,\ x = \mathrm{prox}_1 f(x) + \mathrm{prox}_1 f^*(x)$$

(Indication : poser $z = x - \mathrm{prox}_1 f(x)$ *et démontrer que* $z = \mathrm{prox}_1 f^*(x)$*. Penser à utiliser* $y \in \partial f(x) \iff x \in \partial f^*(y)$ *pour* f *convexe sci.)*

2. Soit $f = i_H$ où H est un sous-espace vectoriel fermé de H. Montrer que $f^* = i_{H^\perp}$. Que donne la décomposition de Moreau dans ce cas ?

Exercice 2. Dans cet exercice, on précise les liens entre l'opérateur proximal et la régularisation de Moreau-Yosida.

1. Soit E un espace vectoriel normé, $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions convexes propres et $[f \Box g](x) := \inf_{y,z \in E, y+z=x} f(y) + g(z)$. On suppose que pour $x_0 \in E$, l'infimum dans la définition de $[f \Box g](x_0)$ est atteint en une paire de point $y_0, z_0 \in E$ tels que $x_0 = y_0 + z_0$. Montrer que

$$\partial [f \Box g](x_0) = \partial f(y_0) \cap \partial g(z_0). \tag{1}$$

(Indication : raisonner par équivalence en partant de la définition du sous-différentiel)

2. Soient $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe semi-continue inférieurement, propre et minorée. On considère f_γ la régularisée de Moreau-Yosida de f, c'est-à-dire avec $g(z) = \frac{1}{2\gamma} \|z\|^2$,

$$f_\gamma(x) := (f \Box g)(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} f(y) + \frac{1}{2\gamma} \|x - y\|^2 .$$

On admettra que l'infimum est atteint et que f_γ est continue.

(i) En utilisant (1), montrer que si $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 = \mathrm{prox}_\gamma f(x_0)$ et $z_0 = x_0 - y_0$,

$$\partial f_\gamma(x_0) = \partial f(y_0) \cap \{\frac{1}{\gamma} z_0\} \tag{2}$$

(ii) Déduire de (2) que f_γ est Gâteaux-différentiable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et que

$$\nabla f_\gamma(x_0) = \frac{1}{\gamma}(x_0 - \mathrm{prox}_\gamma f(x_0)).$$

Montrer que les itérations de l'algorithme du point proximal s'écrivent

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{n+1} = x_n - \gamma \nabla f_\gamma(x_n). \end{cases}$$

(iii) Que se passe-t-il si l'on remplace $g = \frac{1}{2\gamma} \|\cdot\|^2$ par $g = \frac{1}{2\gamma} \|\cdot\|^p$ $(p > 1)$?

Exercice 3. Soit $E = F_1 \oplus F_2$ un espace de Hilbert où F_1 et F_2 sont deux sous-espaces fermés orthogonaux. On considère $f_i : F_i \to \overline{\mathbb{R}}$ convexes sci et $\forall (x,y) \in F_1 \times F_2,\ f(x+y) := f_1(x) + f_2(y)$, qu'on suppose propre. Montrer que $\forall (x,y) \in F_1 \times F_2,\ \mathrm{prox}_\lambda f(x+y) = \mathrm{prox}_\lambda f_1(x) + \mathrm{prox}_\lambda f_2(y)$. En déduire l'opérateur proximal de $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|_{\ell^1} = \sum_{i=1}^n |x_i|$.