M1 MIDO, Université Paris-Dauphine 18 Mars 2016

Examen partiel d'analyse convexe approfondie

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation (en particulier, vous ferez attention à bien donner les hypothèses des théorèmes invoqués). Toute les questions peuvent être traitées en admettant les résultats des questions précédentes.

Exercice

Un point x d'un convexe $K \subseteq \mathbb{R}^n$ est *extrémal* s'il n'existe aucun $y, z \in K \setminus \{x\}$, $\alpha \in]0,1[$ tels que $(1-\alpha)y + \alpha z = x$. On note $\mathrm{ext}(K)$ l'ensemble des points extrémaux de K.

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit K un ensemble convexe compact de $\mathbb{R}^n$, et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe. Montrer qu'il existe (au moins) un point $x^* \in K$ réalisant le maximum dans

$$\sup_{x \in K} f(x),$$

et que ce point x^* est un point extrémal de K.

2. Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble fini et $K = \mathrm{conv}(S)$. Montrer que si x est dans $K \setminus \{S\}$, alors x n'est par extrémal. En déduire que $\mathrm{ext}(K) \subseteq S$.

Problème

Soit $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. On suppose que G est coercive par rapport à sa seconde variable : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a $\lim_{\|z\| \to \infty} G(x,z) = +\infty$.

3. Montrer que la fonction

$$g : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \min_{z \in \mathbb{R}^m} G(x,z)$$

est bien définie, puis que $\mathrm{epi}(g) = \Pi(\mathrm{epi}(G))$ où

$$\begin{aligned} \Pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ (x,z,t) &\mapsto (x,t) \end{aligned}$$

En déduire que la fonction g est convexe.

Dorénavant on fixe une fonction convexe $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, et pour tout $\tau > 0$ on note

$$f_\tau : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \inf_{z \in \mathbb{R}^n} f(z) + \frac{1}{2\tau} \|x - z\|^2 . \tag{1}$$

4. Démontrer que pour tout points $x, z \in \mathbb{R}^n$, $f(z) - f(x) \geq f^+(x; z-x)$.

5. On suppose que f est M-Lipschitz sur la boule $\mathrm{B}(x,r)$ où $r > 0$. Montrer alors que

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \quad f^+(x;v) \geq -M \|v\|,$$

$$\text{puis que} \qquad \forall z \in \mathbb{R}^n, f(z) - f(x) \geq -M \|z - x\| . \tag{2}$$

6. Déduire de la question précédente (et de théorèmes du cours) que pour tout point x in $\mathbb{R}^n$, il existe $M \geq 0$ tel que $f(z) \geq f(x) - M \|z - x\|$, puis que $\lim_{\|z\| \to \infty} f(z) + \frac{1}{2\tau} \|x - z\|^2 = +\infty$.

7. En utilisant la question **3**., en déduire la fonction f_τ est convexe.

8. Démontrer qu'il existe un unique point $z \in \mathbb{R}^n$ réalisant l'infimum dans (1).

On vient donc d'établir que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ il existe un unique point de $\mathbb{R}^n$, que l'on notera $p_\tau(x)$, vérifiant l'égalité

$$f_\tau(x) = f(p_\tau(x)) + \frac{1}{\tau} \|x - p_\tau(x)\|^2.$$

Nous allons maintenant calculer le gradient de f_τ en x en fonction de $p_\tau(x)$.

9. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $x_\tau := p_\tau(x)$. Démontrer que

$$\begin{cases} \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad f_\tau(y) \leq f(x_\tau) + \dfrac{1}{2\tau} \|y - x_\tau\|^2 \\ f_\tau(x) = f(x_\tau) + \dfrac{1}{2\tau} \|x - x_\tau\|^2 \end{cases}$$

En posant $y = x + \varepsilon v$ (où $v \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$), en déduire que

$$f_\tau(x + \varepsilon v) - f_\tau(x) \leq \frac{\varepsilon^2 \|v\|^2}{2\tau} + \varepsilon \langle v | \frac{x - x_\tau}{\tau} \rangle.$$

$$\text{puis que } f_\tau^+(x; v) \leq \langle v | \frac{x - x_\tau}{\tau} \rangle.$$

10. Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction sous-linéaire. Montrer que s'il existe un vecteur w tel que $\forall v \in \mathbb{R}^n,\ g(v) \leq \langle v | w \rangle$, alors g est linéaire. Montrer alors que $g(v) = \langle v | w \rangle$.

11. En déduire que f_τ est Gâteaux-différentiable en x et que $\nabla f_\tau(x) = \frac{1}{\tau}(x - p_\tau(x))$.

On va maintenant montrer que $\lim_{\tau \to 0} f_\tau = f$ et que f_τ est $\mathcal{C}^1$. Pour simplifier, on suppose maintenant f minorée par une constante C (i.e. $f \geq C$ sur $\mathbb{R}^n$).

12. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $x_\tau := p_\tau(x)$. Montrer que $C \leq f(x_\tau) + \frac{1}{2\tau} \|x - x_\tau\|^2 \leq f(x)$. En déduire que

$$\frac{1}{2\tau} \|x - x_\tau\|^2 \leq f(x) - C$$

puis que $\lim_{\tau \to 0} x_\tau = x$ et $\lim_{\tau \to 0} f_\tau(x) = f(x)$.

13. Soit (x_n) une suite de points de $\mathbb{R}^n$ convergeant vers $x \in \mathbb{R}^n$ et soit $z_n = p_\tau(x_n)$.

(i) En utilisant l'inégalité de la question précédente, montrer que la suite (z_n) est bornée.

(ii) Montrer que $z = p_\tau(x)$ si et seulement si $f_\tau(x) = f(z) + \frac{1}{2} \|x - z\|^2$. En déduire que toute sous-suite convergente de (z_n) converge $p_\tau(x)$, puis que $\lim_{n \to \infty} p_\tau(x_n) = p_\tau(x)$.

En conclure que f_τ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ (indication : montrer la continuité des dérivées partielles).

14. Démontrer que f_τ reste $\mathcal{C}^1$ même en supposant seulement $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ convexe non nécessairement minorée.
(Indication : Utiliser l'inégalité (2) *de la question* ***5****. et la même stratégie que dans la question précédente.)*