M1 MIDO, Université Paris-Dauphine 23 Mars 2015

Examen partiel d'analyse convexe approfondie

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation. L'exercice et chacune des deux parties du problèmes peuvent être traités séparément.

Exercice

1. Soit $P : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ la fonction définie par $P(x,t) = x/t$.

a. Soit $(x_0, t_0), (x_1, t_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ et $\theta \in [0,1]$. Montrer que

$$\frac{(1-\theta)x_0 + \theta x_1}{(1-\theta)t_0 + \theta t_1} = (1-\hat{\theta})\frac{x_0}{t_0} + \hat{\theta}\frac{x_1}{t_1}, \text{ où } \hat{\theta} = \frac{\theta t_1}{(1-\theta)t_0 + \theta t_1}.$$

Montrer que l'application $\theta \mapsto \hat{\theta}$ est une bijection monotone de $[0,1]$ dans lui-même.

b. En déduire que si $C \subseteq \mathbb{R}^n$ est convexe, $P^{-1}(C)$ est aussi convexe.

2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe, et $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}$ définie par $g(x,t) = tf(x/t)$. Montrer que g est convexe.

(Indication : montrer que $\mathrm{epi}(g) = P^{-1}(\mathrm{epi}(f))$ *où* $P : (x,t,s) = (x/t, s/t)$*)*

3. En déduire la convexité des fonctions :

- *(énergie cinétique)* $E : (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \mapsto \|x\|^2/t$.
- *(entropie relative)* $F : (x,t) \in \mathbb{R}^2_+ \mapsto t\log(t/x)$
- *(divergence de Kullback-Leibler)* $G : (u,v) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+ \mapsto \sum_{i=1}^n (u_i \log(u_i/v_i) - u_i + v_i)$

Problème

L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique $\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ et de la norme euclidienne $\|v\| = \sqrt{\langle v|v\rangle}$. L'objet du problème est d'étudier en détail la différentiabilité de la fonction distance à un sous-ensemble compact K de $\mathbb{R}^n$, définie par

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_K : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \min_{p \in K} \|x - p\| \end{aligned} \tag{1}$$

On admettra que d_K est 1-Lipschitz. L'ensemble des *projections* de x sur K est défini par :

$$\Pi_K(x) = \{p \in K;\ \|x-p\| = \mathrm{d}_K(x)\} \subseteq K. \tag{2}$$

Partie 1 Soit K un compact convexe de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que si N est une norme strictement convexe [1], alors pour $x \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble

$$\Pi_K^N(x) = \left\{p \in K;\ N(x-p) = \min_{q \in K} N(x-q)\right\}$$

est un singleton. En déduire que $\Pi_K(x)$ est un singleton, que l'on notera $p_K(x)$.

---

1. On utilisera la définition $\forall x \neq y \in E, N(x) = N(y) = r \Longrightarrow N(\frac{x+y}{2}) < r$.

2. Soit (x_i) une suite de points de $\mathbb{R}^n$ qui converge vers $x \in \mathbb{R}^n$, et $p_i = p_K(x_i)$.

a. Soit q la limite d'une sous-suite convergente de (p_i) : montrer que $q \in \Pi_K(x)$.

b. En déduire que $\lim_{i\to\infty} p_i = p_K(x)$, puis que $\mathrm{p}_K : \mathbb{R}^n \to K$ est continue en x.

3. Soit $\Delta(h) = \mathrm{d}_K^2(x+h) - \mathrm{d}_K^2(x)$. Montrer l'inégalité

$$\Delta(h) \leq \|h\|^2 + 2\langle x - p_K(x)|h\rangle \tag{3}$$

En déduire (par symétrie) que $\|h\|^2 + 2\langle x - p_K(x+h)|h\rangle \leq \Delta(h)$ puis que

$$|\Delta(h) - 2\langle x - p_K(x)|h\rangle| \leq 2\,\|p_K(x) - p_K(x+h)\|\,\|h\| + \|h\|^2$$

4. Déduire de **2.** et **3.** que d_K^2 est différentiable en x, et que $\nabla \mathrm{d}_K^2(x) = 2(x - p_K(x))$.

Partie 2. Le compact $K \subseteq \mathbb{R}^n$ n'est plus supposé convexe.

1. Donner un exemple de $K \subseteq \mathbb{R}$ non convexe et $x \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{card} \Pi_K(x) \geq 2$.

2. On pose $\phi : x \mapsto \|x\|^2 - \mathrm{d}_K(x)^2$. Montrer que $\phi(x) = \max_{p\in K} 2\langle x|p\rangle - \|p\|^2$ avec égalité pour $p \in \Pi_K(x)$, en déduire que la fonction ϕ est convexe.

Le but des questions 3 à 6 est de calculer la dérivée directionnelle de ϕ :

$$\phi^+(x;v) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(\phi(x+tv) - \phi(x)) = \inf_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(\phi(x+tv) - \phi(x))$$

3. Montrer que pour $x, v \in \mathbb{R}$ et $p \in \Pi_K(x)$, $\phi(x+tv) - \phi(x) \geq 2t\langle v|p\rangle$, puis que

$$\phi^+(x;v) \geq \max_{p\in\Pi_K(x)} 2\langle v|p\rangle \tag{4}$$

4. Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $q \in \Pi_K(y)$. Montrer que $\phi(x) \geq 2\langle q|x\rangle - \|q\|^2$. En déduire que si $y = x + tv$ avec $t > 0$ et $v \in \mathbb{R}^n$, et $q \in \Pi_K(y)$ alors

$$\phi^+(x;v) \leq \frac{\phi(x+tv) - \phi(x)}{t} \leq 2\langle q|v\rangle \tag{5}$$

5. Soit $y_i = x + t_i v$ où $\lim_{i\to\infty} t_i = 0$ et $q_i \in \Pi_K(y_i)$. Montrer que quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que (q_i) converge vers un point $p \in \mathbb{R}^n$, puis que $p \in \Pi_K(x)$.

6. Déduire de **3.**, **4.** et **5.** l'expression suivante :

$$\phi^+(x;v) = \max_{p\in\Pi_K(x)} 2\langle v|p\rangle \tag{6}$$

7. En utilisant (6), montrer que $\phi^+(x;v)$ est linéaire si et seulement si $\Pi_K(x)$ est un singleton.

8. Montrer l'équivalence des propositions suivantes, pour $x \in \mathbb{R}^n$:

(i) d_K^2 est (Fréchet-)différentiable en x ;

(ii) ϕ est Gâteaux-différentiable en x ;

(iii) $\Pi_K(x)$ est un singleton.

En déduire que d_K^2 est Fréchet-différentiable presque partout, donner l'expression de $\nabla \mathrm{d}_K^2$.