M1 MIDO, Université Paris-Dauphine 24 mai 2016

Examen d'analyse convexe approfondie

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation (en particulier, vous ferez attention à bien donner les hypothèses des théorèmes invoqués). Toutes les questions peuvent être traitées en admettant les résultats des questions précédentes.

L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire et de la norme euclidienne canoniques et est identifié à son dual. Le sous-différentiel d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ en un point est considéré comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, et la transformée de Legendre-Fenchel de f comme une fonction sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1. Soient $g_1, \ldots, g_k : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ des fonctions convexes, semi-continue inférieurement et propres. On considère le problème de minimisation suivant, où l'on suppose le minimum atteint :

$$P := \min_{z \in \mathbb{R}^n} g_1(z) + \ldots + g_k(z).$$

On suppose de plus qu'il existe un point $z_0 \in \mathbb{R}^n$ où les fonctions $g_1, \ldots, g_k$ sont continues.

1. Justifier que pour tous $z, w_i \in \mathbb{R}^n$, $g_i(z) + g_i^*(w_i) \geq \langle z | w_i \rangle$. En déduire que $P \geq D$ où $D := \sup \left\{ -\sum_{1 \leq i \leq k} g_i^*(w_i) \mid w_1, \ldots, w_k \in \mathbb{R}^n \text{ tq } \sum_{i=1}^k w_i = 0 \right\}$.
2. Soit $\bar{z}$ un point réalisant le minimum dans la définition de P. Justifier l'existence de $\bar{w}_1, \ldots \bar{w}_k \in \mathbb{R}^n$ tels que pour $1 \leq i \leq k$, $\bar{w}_i \in \partial g_i(\bar{z})$ et tels que $\bar{w}_1 + \ldots + \bar{w}_k = 0$.
3. En utilisant l'égalité de Fenchel-Young, démontrer que $-\sum_{1 \leq i \leq k} g_i^*(\bar{w}_i) = P$. En déduire la dualité forte : $P = D$.

Exercice 2. Soient $f_1, \ldots, f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexes $\mathcal{C}^1$ et soit $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \max_{1 \leq i \leq k} f_i(x)$. Soit x_0 un point de $\mathbb{R}^n$ tel que $\boxed{f(x_0) = f_1(x_0) = \ldots = f_k(x_0).}$ On souhaite démontrer que

$$\partial f(x_0) = \operatorname{conv}(\{w_i \mid 1 \leq i \leq k\}) \text{ où } w_i = \nabla f_i(x_0). \tag{1}$$

On pose $K := \operatorname{conv}(\{w_i \mid 1 \leq i \leq k\})$.

4. Montrer que pour $1 \leq i \leq k$, w_i appartient à $\partial f(x_0)$. En déduire que $K \subseteq \partial f(x_0)$.

> **Rappels.** Étant donné $X \subseteq \mathbb{R}^n$, on pose $h_X : y \in \mathbb{R}^n \mapsto \sup_{x \in X} \langle x | y \rangle$. On rappelle que :
> - Soient C, D convexes fermés. Alors $C \subseteq D$ si et seulement si $h_C \leq h_D$.
> - Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est convexe et continue en x_0, alors $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $f^+(x_0; v) = h_{\partial f(x_0)}(v)$.

5. Justifier les égalités et inégalités suivantes, en conclure que $\partial f(x_0) \subseteq K$:

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, h_{\partial f(x_0)}(v) = f^+(x_0; v) \leq \max_{1 \leq i \leq k} f_i^+(x_0; v) = \max_{1 \leq i \leq k} \langle w_i | v \rangle = h_K(v).$$

6. *Application.* Soient $w_1, \ldots, w_k \in \mathbb{R}^n$ et $f_i(x) := \langle w_i | x \rangle$. En utilisant l'égalité (1), démontrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :
   (P_1) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \max_{1 \leq i \leq k} \langle w_i | x \rangle \geq f(0)$
   (P_2) $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$ tq $\sum_{1 \leq i \leq k} \lambda_i = 1$ et $\sum_{1 \leq i \leq k} \lambda_i w_i = 0$.

Problème. Soit $\varepsilon > 0$. On appelle ε-sous-différentiel d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ en un point x_0 de $\mathrm{dom}(f)$ l'ensemble

$$\partial_\varepsilon f(x_0) = \{s \in \mathbb{R}^n \mid \forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) + \varepsilon \geq f(x_0) + \langle s | x - x_0 \rangle\}.$$

7. Soit $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$. Montrer que $s \in \partial_\varepsilon f(x_0)$ si et seulement si $f(x_0) + f^*(s) \leq \langle s|x_0\rangle + \varepsilon$. En déduire que l'ensemble $\partial_\varepsilon f(x_0)$ est convexe et fermé.

On suppose désormais que $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ est convexe, sci et propre et que $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$.

8. Justifier que $f(x_0) = \sup_{s \in \mathbb{R}^n} \langle s|x_0\rangle - f^*(s)$. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, $\partial_\varepsilon f(x_0) \neq \emptyset$.

L'objectif des quatre questions suivantes est de démontrer l'énoncé suivant, qui établit un lien entre le ε-sous-différentiel et le sous-différentiel usuel :

Théorème (Brønsted-Rockafellar). Soit x_0 un point de $\mathrm{dom}(f)$, $s_0 \in \partial_\varepsilon f(x_0)$ où $\varepsilon > 0$. Alors il existe $x_\varepsilon \in \mathrm{dom}(f)$ et $s_\varepsilon \in \partial f(x_\varepsilon)$ tels que $\|x_\varepsilon - x_0\| \leq \sqrt{\varepsilon}$ et $\|s_\varepsilon - s_0\| \leq \sqrt{\varepsilon}$.

Pour les quatre questions suivantes, on fixe $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$ et $s_0 \in \partial_\varepsilon f(x_0)$.

9. On pose $g(x) = f(x) - \langle s_0|x\rangle$. Déduire de $s_0 \in \partial_\varepsilon f(x_0)$ que $g(x_0) \leq \inf g + \varepsilon$.

10. Soit $h(x) = g(x) + \sqrt{\varepsilon}\,\|x - x_0\|$ et soit x_ε un minimiseur de h sur $\mathbb{R}^n$. Justifier les inégalités

$$\inf g + \sqrt{\varepsilon}\,\|x_\varepsilon - x_0\| \leq g(x_\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}\,\|x_\varepsilon - x_0\| \leq g(x_0).$$

En déduire que $\|x_\varepsilon - x_0\| \leq \sqrt{\varepsilon}$.

11. En utilisant l'optimalité de x_ε (c-à-d. $x_\varepsilon \in \arg\min_{\mathbb{R}^n} h$), démontrer qu'il existe $s_\varepsilon \in \partial f(x_\varepsilon)$ et $r_\varepsilon \in \partial \ell(x_\varepsilon)$ où $\ell(x) = \sqrt{\varepsilon}\,\|x - x_0\|$ tels que $s_\varepsilon - s_0 + r_\varepsilon = 0$.

12. Démontrer que ℓ est $\sqrt{\varepsilon}$-Lipschitz. En partant de la définition de $r_\varepsilon \in \partial\ell(x_\varepsilon)$, en déduire que $\|r_\varepsilon\| \leq \sqrt{\varepsilon}$. Conclure la démonstration du théorème de Brønsted-Rockafellar.

On donne maintenant une application de ce théorème.

13. Soit $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$. Déduire de **8**. et du théorème de Brønsted-Rockafellar que pour $\varepsilon > 0$, il existe x_ε tel que $\partial f(x_\varepsilon) \neq \emptyset$ et $\|x_0 - x_\varepsilon\| \leq \sqrt{\varepsilon}$.
(En particulier, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \partial f(x) \neq \emptyset\}$ est dense dans $\mathrm{dom}(f)$.)

14. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ convexe sci minorée telle que l'ensemble $R = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} \partial f(x)$ est fermé.
- (i) Démontrer que $R = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \partial f^*(y) \neq \emptyset\}$, puis par **13**. que $R = \mathrm{dom}(f^*)$.
- (ii) Montrer que x est un minimiseur de f sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $x \in \partial f^*(0)$.
- (iii) Déduire des deux questions précédentes que f atteint son minimum sur $\mathbb{R}^n$.