M1 MIDO, Université Paris-Dauphine 23 Mars 2015

Examen d'analyse convexe approfondie

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation. L'exercice et chacune des deux parties du problèmes peuvent être traités séparément.

L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire et de la norme euclidienne canoniques et est identifié à son dual. Le sous-différentiel d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ est considéré comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, et la transformée de Legendre-Fenchel de f comme une fonction sur $\mathbb{R}^n$.

Problème. On s'intéresse au problème de minimisation suivant :

$$p := \inf_{x\in\mathbb{R}^n} F(Ax) + G(x) \tag{P}$$

où $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application linéaire et $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ et $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont convexes continues et minorées. Pour rappel, l'application linéaire $A^* : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est caractérisée par la condition $\langle Ax|y\rangle = \langle x|A^*y\rangle$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Dualité faible Dans cette partie, on utilise l'approche lagrangienne pour retrouver le problème dual de Fenchel-Rockafellar de (P).

1. Justifier les égalités suivantes

$$p = \inf_{\substack{x\in\mathbb{R}^n, y\in\mathbb{R}^m \\ Ax=y}} F(y) + G(x) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n, y\in\mathbb{R}^m} \sup_{z\in\mathbb{R}^m} F(y) + G(x) + \langle Ax - y|z\rangle$$

2. Montrer l'inégalité de dualité faible $p \geq d$ où d est défini par

$$d := \sup_{z\in\mathbb{R}^m} \inf_{x\in\mathbb{R}^n, y\in\mathbb{R}^m} F(y) + G(x) + \langle Ax - y|z\rangle. \tag{D}$$

3. Montrer que

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n, y\in\mathbb{R}^m} F(y) + G(x) + \langle Ax - y|z\rangle = -F^*(z) - G^*(-A^*z)$$

et en déduire l'expression suivante du problème dual :

$$d = \sup_{z\in\mathbb{R}^m} -F^*(z) - G^*(-A^*z). \tag{D'}$$

Dualité forte On suppose désormais que $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est **strictement convexe**, de classe $\mathcal{C}^1$, et que $\lim_{\|x\|\to\infty} G(x) = +\infty$.

4. Montrer l'unicité du minimiseur $\bar{x}$ pour le problème (P) (on admettra l'existence).

5. Soit $H = F \circ A$ et $p \in \partial(H+G)(x)$. Montrer que

$$H(x) - H(x_0) \geq \langle p|x - x_0\rangle + G(x_0) - G(x),$$

puis que pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, $H^+(x;v) \geq \langle p - \nabla G(x)|v\rangle$. En déduire que $p - \nabla G(x) \in \partial H(x)$.

6. On admet que $\partial H(x) = \partial(F \circ A)(x) = A^* \partial F(Ax)$. Déduire de la question précédente que $\bar{x}$ est le minimiseur de (P) si et seulement si il existe $\bar{z} \in \partial F(A\bar{x})$ tel que $A^*\bar{z} + \nabla G(\bar{x}) = 0$.

7. Soient $(\bar{x}, \bar{z})$ comme dans la question précédente. Montrer les deux égalités

$$F(A\bar{x}) + F^*(\bar{z}) = \langle A\bar{x}|\bar{z}\rangle \qquad\qquad G(\bar{x}) + G^*(-A^*\bar{z}) = -\langle \bar{x}|A^*\bar{z}\rangle.$$

En déduire la relation de dualité forte $d = p$ et que $\bar{z}$ est un maximiseur de (D').

8. Le but de cette question est de montrer que le minimiseur $\bar{x}$ de (P) peut être retrouvé à partir de n'importe quel maximiseur z_0 de (D').

(a) Soit z_0 un maximiseur de (D'). Montrer

$$F(A\bar{x}) + F^*(z_0) \geq \langle A\bar{x}|z_0\rangle \qquad\qquad G(\bar{x}) + G^*(-A^*z_0) \geq -\langle \bar{x}|A^*z_0\rangle.$$

Montrer que ces deux égalités doivent être des égalités, en déduire que $-A^*z_0 \in \partial G(\bar{x})$. *(Indication : supposer qu'une des inégalités est stricte, obtenir une contradiction à $p = d$).*

(b) Soient $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ tels que $g = \nabla G(x_0) = \nabla G(x_1)$. En appliquant Fenchel-Young aux couples (x_0, g), (x_1, g) et $(\frac{1}{2}(x_1 + x_2), g)$, montrer que $G(\frac{1}{2}(x_0 + x_1)) = \frac{1}{2}(G(x_0) + G(x_1))$. En déduire que $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \nabla G(x)$ est injective, puis que $\bar{x} = \nabla G^{-1}(-A^*z_0)$.

9. *Application :* Donner l'expression du problème dual (D') lorsque $G(x) = \frac{1}{2}\|x - x_0\|^2$ où $\|.\|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Quelle est la relation entre $\bar{x}$ et un maximiseur z_0 de (D') ?

Exercice. Soit Ω un **ouvert borné** de $\mathbb{R}^n$ et $u, v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes telles que[1]

$$\begin{cases} u|_{\operatorname{bd}\Omega} = v|_{\operatorname{bd}\Omega} \\ \quad v \geq u \text{ sur } \Omega. \end{cases}$$

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexe et $x_0 \in \Omega$. Soit p un vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall x \in \Omega, f(x) \geq f(x_0) + \langle x - x_0|p\rangle.$$

Montrer que $f^+(x_0; \cdot) \geq \langle p|\cdot\rangle$, et en déduire $p \in \partial f(x_0)$.

2. Soit $x_0 \in \Omega$ et $p \in \partial v(x_0)$ et soit $a = \sup_{x\in\Omega}(v(x_0) + \langle x - x_0|p\rangle) - u(x)$.

(i) Montrer que $a \geq 0$.

(ii) Montrer que si $a = 0$ alors $p \in \partial u(x_0)$.

(iii) On suppose désormais que $a > 0$. Montrer que le supremum dans la définition de a est atteint en un point $x_1 \in \overline{\Omega}$, puis que x_1 n'est pas dans $\operatorname{bd}\Omega$. *(Indication : montrer que $x_1 \in \operatorname{bd}\Omega$ contredit l'hypothèse $p \in \partial v(x_0)$).*

(iv) Montrer que

$$\forall x \in \Omega,\ u(x) \geq u(x_1) + \langle x - x_1|p\rangle$$

Déduire des questions précédentes que $p \in \partial u(x_1)$.

3. Conclure : $\partial v(\Omega) \subseteq \partial u(\Omega)$, où l'on a noté $\partial u(\Omega) := \bigcup_{x\in\Omega} \partial u(x)$.

1. On note $\operatorname{bd}\Omega$ le bord topologique de Ω afin de ne pas indroduire de confusion avec la notation pour le sous-différentiel.