
Examen d'analyse convexe approfondie

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation. L'exercice et chacune des deux parties du problèmes peuvent être traités séparément.

L'espace \mathbb{R}^n est muni du produit scalaire et de la norme euclidienne canoniques et est identifié à son dual. Le sous-différentiel d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est considéré comme un sous-ensemble de \mathbb{R}^n , et la transformée de Legendre-Fenchel de f comme une fonction sur \mathbb{R}^n .

Problème. On s'intéresse au problème de minimisation suivant :

$$p := \inf_{x \in \mathbb{R}^n} F(Ax) + G(x) \quad (\text{P})$$

où $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire et $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ et $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont convexes continues et minorées. Pour rappel, l'application linéaire $A^* : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est caractérisée par la condition $\langle Ax|y \rangle = \langle x|A^*y \rangle$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Dualité faible Dans cette partie, on utilise l'approche lagrangienne pour retrouver le problème dual de Fenchel-Rockafellar de (P).

1. Justifier les égalités suivantes

$$p = \inf_{\substack{x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m \\ Ax=y}} F(y) + G(x) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m} \sup_{z \in \mathbb{R}^m} F(y) + G(x) + \langle Ax - y|z \rangle$$

2. Montrer l'inégalité de dualité faible $p \geq d$ où d est défini par

$$d := \sup_{z \in \mathbb{R}^m} \inf_{x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m} F(y) + G(x) + \langle Ax - y|z \rangle. \quad (\text{D})$$

3. Montrer que

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m} F(y) + G(x) + \langle Ax - y|z \rangle = -F^*(z) - G^*(-A^*z)$$

et en déduire l'expression suivante du problème dual :

$$d = \sup_{z \in \mathbb{R}^m} -F^*(z) - G^*(-A^*z). \quad (\text{D}')$$

Dualité forte On suppose désormais que $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est **strictement convexe**, de classe \mathcal{C}^1 , et que $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} G(x) = +\infty$.

4. Montrer l'unicité du minimiseur \bar{x} pour le problème (P) (on admettra l'existence).

5. Soit $H = F \circ A$ et $p \in \partial(H + G)(x)$. Montrer que

$$H(x) - H(x_0) \geq \langle p|x - x_0 \rangle + G(x_0) - G(x),$$

puis que pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, $H^+(x; v) \geq \langle p - \nabla G(x)|v \rangle$. En déduire que $p - \nabla G(x) \in \partial H(x)$.

6. On admet que $\partial H(x) = \partial(F \circ A)(x) = A^* \partial F(Ax)$. Dédurre de la question précédente que \bar{x} est le minimiseur de (P) si et seulement si il existe $\bar{z} \in \partial F(A\bar{x})$ tel que $A^* \bar{z} + \nabla G(\bar{x}) = 0$.
7. Soient (\bar{x}, \bar{z}) comme dans la question précédente. Montrer les deux égalités

$$F(A\bar{x}) + F^*(\bar{z}) = \langle A\bar{x} | \bar{z} \rangle \quad G(\bar{x}) + G^*(-A^* \bar{z}) = -\langle \bar{x} | A^* \bar{z} \rangle.$$

En déduire la relation de dualité forte $d = p$ et que \bar{z} est un maximiseur de (D').

8. Le but de cette question est de montrer que le minimiseur \bar{x} de (P) peut être retrouvé à partir de n'importe quel maximiseur z_0 de (D').
- (a) Soit z_0 un maximiseur de (D'). Montrer

$$F(A\bar{x}) + F^*(z_0) \geq \langle A\bar{x} | z_0 \rangle \quad G(\bar{x}) + G^*(-A^* z_0) \geq -\langle \bar{x} | A^* z_0 \rangle.$$

Montrer que ces deux égalités doivent être des égalités, en déduire que $-A^* z_0 \in \partial G(\bar{x})$.
(Indication : supposer qu'une des inégalités est stricte, obtenir une contradiction à $p = d$).

- (b) Soient $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ tels que $g = \nabla G(x_0) = \nabla G(x_1)$. En appliquant Fenchel-Young aux couples (x_0, g) , (x_1, g) et $(\frac{1}{2}(x_0 + x_1), g)$, montrer que $G(\frac{1}{2}(x_0 + x_1)) = \frac{1}{2}(G(x_0) + G(x_1))$.
En déduire que $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \nabla G(x)$ est injective, puis que $\bar{x} = \nabla G^{-1}(-A^* z_0)$.

9. Application : Donner l'expression du problème dual (D') lorsque $G(x) = \frac{1}{2} \|x - x_0\|^2$ où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n . Quelle est la relation entre \bar{x} et un maximiseur z_0 de (D') ?

Exercice. Soit Ω un **ouvert borné** de \mathbb{R}^n et $u, v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions convexes telles que¹

$$\begin{cases} u|_{\text{bd}\Omega} = v|_{\text{bd}\Omega} \\ v \geq u \text{ sur } \Omega. \end{cases}$$

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et $x_0 \in \Omega$. Soit p un vecteur de \mathbb{R}^n tel que

$$\forall x \in \Omega, f(x) \geq f(x_0) + \langle x - x_0 | p \rangle.$$

Montrer que $f^+(x_0; \cdot) \geq \langle p | \cdot \rangle$, et en déduire $p \in \partial f(x_0)$.

2. Soit $x_0 \in \Omega$ et $p \in \partial v(x_0)$ et soit $a = \sup_{x \in \Omega} (v(x) + \langle x - x_0 | p \rangle) - u(x)$.

(i) Montrer que $a \geq 0$.

(ii) Montrer que si $a = 0$ alors $p \in \partial u(x_0)$.

(iii) On suppose désormais que $a > 0$. Montrer que le supremum dans la définition de a est atteint en un point $x_1 \in \bar{\Omega}$, puis que x_1 n'est pas dans $\text{bd}\Omega$.

(Indication : montrer que $x_1 \in \text{bd}\Omega$ contredit l'hypothèse $p \in \partial v(x_0)$).

(iv) Montrer que

$$\forall x \in \Omega, u(x) \geq u(x_1) + \langle x - x_1 | p \rangle$$

Dédurre des questions précédentes que $p \in \partial u(x_1)$.

3. Conclure : $\partial v(\Omega) \subseteq \partial u(\Omega)$, où l'on a noté $\partial u(\Omega) := \bigcup_{x \in \Omega} \partial u(x)$.

1. On note $\text{bd}\Omega$ le bord topologique de Ω afin de ne pas introduire de confusion avec la notation pour le sous-différentiel.