Chapitre 3

Dualité

3.1 Théorème de Hahn-Banach

3.1.1 Théorème de Hahn-Banach

Le but de cette section est d'énoncer et de démontrer partiellement le théorème de Hahn-Banach.

Théorème 41 (Hahn-Banach)**.** *Soit E un espace vectoriel et $p : E \to \mathbb{R}$ une fonction sous-linéaire (1-homogène et sous-additive). On se donne un sous-espace vectoriel F de E et $\phi : F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire dominée par p, c'est-à-dire que $\phi \leq p|_F$.*

Alors, il existe une extension de ϕ à E qui reste dominée par p, c'est-à-dire une forme linéaire $\psi : E \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in F,\ \psi(x) = \phi(x)$$
$$\forall x \in E,\ \psi(x) \leq p(x).$$

Remarques 1. — L'extension définie par cet énoncé n'est en général pas unique.
- — Nous ne démontrerons que le cas où $F \subseteq E$ est de codimension finie. La démonstration du cas général n'est pas constructive et repose sur l'axiome du choix.

Démonstration. Par une simple récurrence, il suffit de savoir traiter le cas où F est de codimension 1. Supposons donc que $E = F + \mathbb{R}y$, où $y \notin F$. Par définition, tout vecteur x de E être décomposé de manière unique comme une somme $x = z + ty$ où z est dans F et t dans $\mathbb{R}$. On définit

$$\psi(z + ty) = \phi(z) + t\lambda,$$

où $\lambda := \psi(y)$ est à déterminer de sorte à respecter la contrainte $\psi \leq p$. Ainsi, on voudrait

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \psi(z + ty) = \phi(z) + t\lambda \leq p(z + ty)$$

Autrement dit, on est ramené à montrer l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall z \in F, \qquad t\lambda \leq p(z+ty) - \phi(z)$$

Pour formuler le cas $t > 0$, on pose $w = z/t$ puis on utilise l'homogénéité de p et ϕ :

$$\begin{aligned}
&\forall t > 0, \forall z \in F, \qquad t\lambda \leq p(z+ty) - \phi(z) \\
&\iff \forall t > 0, \forall w \in F, t\lambda \leq p(tw+ty) - \phi(tw) \\
&\Longleftarrow \forall w \in F, \lambda \leq p(w+y) - \phi(w)
\end{aligned}$$

Pour le cas $t < 0$, on pose $s = -t > 0$ et $w' = z/s$:

$$\begin{aligned}
&\forall t < 0, \forall z \in F, \qquad t\lambda \leq p(z+ty) - \phi(z) \\
&\iff \forall s > 0, \forall w' \in F, -s\lambda \leq p(sw' - sy) - \phi(sw') \\
&\iff \forall s > 0, \forall w' \in F, s\lambda \geq -p(sw' - sy) + \phi(sw') \\
&\Longleftarrow \forall w' \in F, \lambda \geq \phi(w') - p(w' - y)
\end{aligned}$$

Ainsi, pour que l'extension de ϕ soit majorée par p, il suffit que λ vérifie les inégalités

$$\forall w, w' \in F, \qquad \phi(w') - p(w'-y) \leq \lambda \leq p(w+y) - \phi(w),$$

Pour montrer qu'un tel λ existe, il suffit de démontrer que

$$\begin{aligned}
&\max_{w' \in F} \phi(w') - p(w'-y) \leq \min_{w \in F} p(w+y) - \phi(w) \\
&\iff \forall (w, w') \in F, \qquad \phi(w') - p(w'-y) \leq p(w+y) - \phi(w)
\end{aligned}$$

Nous utilisons finalement l'hypothèse $\phi \leq p$ pour démontrer cette dernière inégalité :

$$\phi(w) + \phi(w') = \phi(w+w') \leq p(w+y-y+w') \leq p(w+y) + p(w'-y) \qquad \square$$

Corollaire 42. *Soit E un espace vectoriel normé, soit F un sous-espace et soit $\phi \in F^*$ une forme linéaire continue. Alors, il existe $\psi \in E^*$ telle $\|\psi\|_{E^*} \leq \|\phi\|_{F^*}$.*

Démonstration. On pose $M = \|\phi\|_{F^*}$. Alors $\phi(x) \leq M\|x\|$ pour tout $x \in F$. En appliquant Hahn-Banach avec la fonction $p(x) = M\|x\|$, qui est 1-homogène et sous-additive, on construit $\psi : E \to \mathbb{R}$ vérifiant $\psi(x) \leq M\|x\|$, i.e. $\|\psi\|_{E^*} = M$. $\square$

Corollaire 43. *Soit E un espace vectoriel normé, il existe $\phi \in E^*$ de norme 1 telle que $\phi(x) = \|x\|$.*

Démonstration. Posons pour $\phi(tx) = t\|x\|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors ϕ est une forme linéaire continue sur $\mathbb{R}x$ de norme 1 et vérifiant $\phi(x) = \|x\|$. D'après le corollaire précédent ϕ se prolonge en une forme linéaire continue sur de norme 1 sur E. $\square$

Corollaire 44. *Soit E un espace vectoriel normé et $x \neq y \in E$. Alors, il existe $\phi \in E^*$ de norme 1 vérifiant $\phi(x) \neq \phi(y)$.*

3.1.2 Séparation des convexes

Sous sa forme géométrique le théorème de Hahn-Banach affirme que deux ensembles convexes disjoints peuvent être séparés par un hyperplan affine. Comme première étape, on se propose de séparer un convexe ouvert et un point.

Proposition 45. *Soit E un espace vectoriel normé, C un ouvert convexe de E et $z \notin C$. Alors, il existe $\phi \in E^*$ telle que*

$$\forall x \in C, \qquad \phi(x) < \phi(z).$$

Pour montrer cette forme géométrique, nous utiliserons quelques propriétés de la *jauge* $j : E \to \mathbb{R}$ d'un convexe C, définie par $j(x) = \inf\{t > 0 \mid x \in tC\}$, dont la démonstration est laissée en exercice. On rappelle j est 1-homogène et sous-additive. Si de plus C est ouvert et contient l'origine, alors
(i) $\exists M \geq 0,\ j(z) \leq M \|z\|$;
(ii) $C = \{j < 1\}$.

Preuve de la proposition 45. Quitte à tout translater, suppose que le convexe C contient l'origine. Soit j la jauge de C, qui par le lemme précédent est 1-homogène et sous-additive. Pour $t \in \mathbb{R}$ on pose $\phi(tz) = t$ sur l'espace $F = \mathbb{R}z$. Montrons que $\phi \leq j$ sur F. Comme $z \notin C$, on a $j(z) > 1$. Par conséquent, $\phi(tz) = t < tj(z)$ pour tout $t \geq 0$. Pour $t < 0$ on a bien sûr $\phi(-tz) < 0 \leq j(-tz)$. Ainsi, on peut donc appliquer le théorème de Hahn-Banach et prolonger ϕ en une forme linéaire ψ sur E vérifiant l'inégalité $\psi \leq j$. En particulier, pour $x \in C$, $\psi(w) \leq j(w) < 1 = \psi(z)$. Enfin, ϕ est continue car

$$|\phi(x)| = \max(\phi(x), \phi(-x)) \leq \max(j(x), j(-x)) \leq M \|x\|$$

par le lemme précédent. □

Théorème 46. *Soit E un espace vectoriel normé et soient A, B deux ensembles convexes disjoints.*
(i) Si A est ouvert il existe $\phi \in E^*$ telle que

$$\forall x \in A, \forall y \in B, \qquad \phi(x) < \phi(y)$$

(ii) Si A est compact et B fermé, il existe $\phi \in E^*$ et $\epsilon > 0$ tels que

$$\forall x \in A, \forall y \in B, \qquad \phi(x) + \epsilon < \phi(y)$$

Remarque 13. L'hypothèse que B est compact est importante pour l'existence d'une séparation stricte. Par exemple les ensembles convexes fermés suivants ne peuvent pas êtres séparés strictement :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y \geq 1/x\} \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y \leq -1/x\}.$$

Démonstration. On commence par (i). Il s'agit de démontrer que

$$\forall x, y \in A \times B, \phi(x-y) < 0 \Longleftrightarrow \forall w \in C_0, \phi(w) < 0, \tag{3.1}$$

où $C = A \oplus (-B)$. La somme de Minkowski d'un ensemble avec un ouvert est ouverte. De plus, l'hypothèse que A et B soient disjoint implique que C ne contient pas l'origine. Il suffit donc d'appliquer la proposition précédente.
(ii) Soit $A_\eta = A \oplus \mathrm{B}(0, \eta)$. Notons d'abord qu'il existe $\eta > 0$ tel que $A_\eta \cap B = \emptyset$. Si ça n'était pas le cas il existerait deux suites x_n dans A et y_n dans B tels que $\|x_n - y_n\| \leq 1/n$. Par compacité, on pourrait extraire une sous-suite convergente de $x_n \in A$, dont la limite serait un point de $A \cap B$.

Par construction, l'ensemble convexe ouvert $A' = A \oplus \mathrm{int}(\mathrm{B}(0, \eta))$ est ouvert et n'intersecte pas B. On peut alors appliquer le résultat précédent à A' et B, et construire $\phi \in E^*$ telle que

$$\forall z \in A', \forall y \in B, \ \phi(z) < \phi(y).$$

$$\text{i.e. } \forall x \in A, \forall u \in \mathrm{B}(0, \eta/2), \forall y \in B, \ \phi(x+u) = \phi(x) + \phi(u) < \phi(y).$$

Il suffit alors de poser $\varepsilon = \sup_{u \in \mathrm{B}(0,\eta)} \phi(u) = \eta \|\phi\|_{E^*} > 0$ pour obtenir le résultat. □

Corollaire 47. *Soit C un convexe fermé d'intérieur non vide et x un point du bord de C. Alors C admet un* hyperplan d'appui *en x : $\exists \phi \in E^* \setminus \{0\}$ telle que*

$$\forall y \in C, \qquad \phi(y) \leq \phi(x)$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème précédent à $A = \mathrm{int} C$ et $B = \{x\}$. □

3.1.3 Enveloppe convexe fermée d'un ensemble

Définition 14. Soit A une partie fermée d'un espace vectoriel normé E. L'enveloppe convexe fermée de A, notée $\overline{\mathrm{conv}} A$, est l'intersection de tout les convexes fermés contenant A.

Remarque 14. L'enveloppe convexe fermée de A est égale à l'adhérence de l'enveloppe convexe de A (car l'adhérence de $\mathrm{conv}(A)$ est convexe et fermée).

Définition 15. On appelle *demi-espace fermé* de E les ensembles de la forme $H = \{x \in E \mid \phi(x) \leq \alpha\}$ où ϕ est une forme linéaire continue non nulle et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition 48. *Soit $A \subseteq E$ où E est un espace vectoriel normé. L'enveloppe convexe fermée de A coïncide avec l'intersection des demi-espaces fermés contenant A.*

Démonstration. On pose $C := \overline{\mathrm{conv}}A$ et D l'intersection de tous les demi-espaces fermés contenant A. L'ensemble D est un convexe fermé contenant A, de sorte que $C \subseteq D$. Pour montrer la réciproque, considérons un point x n'appartenant pas à C. Par la version géométrique du théorème de Hahn-Banach (Théorème 46.(ii)), il existe $\phi : E \to \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ vérifiant

$$\sup_{z \in C} \phi(z) + \varepsilon \leq \phi(x).$$

Ainsi, le demi-espace fermé $H = \{z \in E \mid \phi(z) \leq \phi(x) - \varepsilon\}$ contient A et pas x, de sorte que D (qui est contenu dans H) ne contient pas x. □

Exemple 8. Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 1/(1+x^2)\}$. Alors, $\overline{\mathrm{conv}}A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$.

Notation 1. Étant donnée une forme linéaire continue ϕ sur un espace vectoriel normé E et x un point de E, $\boxed{\text{on notera } \langle \phi | x \rangle := \phi(x).}$

Définition 16. Soit A un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé E. On appelle *fonction support de A* la fonction $\mathrm{h}_A : E^* \to \overline{\mathbb{R}}$ définie par

$$h_A : \phi \in E^* \mapsto \sup_{x \in A} \langle \phi | x \rangle \tag{3.2}$$

Théorème 49. *Soit E un espace vectoriel normé.*

(i) Si C, D sont deux convexes fermés de E, alors $C \subseteq D$ si et seulement si $\mathrm{h}_C \leq \mathrm{h}_D$.

(ii) En particulier, l'application $h : C \to \mathrm{h}_C$ est injective sur les convexes fermés.

Démonstration. L'implication directe est évidente : si $C \subseteq D$,

$$\mathrm{h}_C(\phi) = \sup_{x \in C} \langle \phi | x \rangle \leq \sup_{x \in D} \langle \phi | x \rangle = \mathrm{h}_D(\phi).$$

Pour démontrer la réciproque, supposons que $C \not\subseteq D$. Il existe alors un point $x \in C$ qui n'appartient pas à D. Alors, il existe une forme linéaire continue ϕ séparant strictement le singleton $\{x\}$ et D, c'est-à-dire que $h_D(\phi) = \sup_{y \in D} \phi(y) + \varepsilon < \phi(x)$. En particulier, $\mathrm{h}_D(\phi) < \phi(x) \leq \mathrm{h}_C(\phi)$. Ceci contredit l'inégalité $\mathrm{h}_C \leq \mathrm{h}_D$. □

3.1.4 Enveloppe convexe semi-continue inférieure d'une fonction

Définition 17. Une fonction $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ est *semi-continue inférieurement* ssi

$$\forall x \in E, \forall x_n \to x, \liminf_{n \to +\infty} f(x_n) \geq f(x) \tag{3.3}$$

Proposition 50. *Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) f est semi-continue inférieurement;

(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, le sous-niveau $\{f \leq \alpha\}$ est fermé ;

(iii) $\mathrm{epi}(f)$ *est fermé dans* $\mathbb{R} \times E$ *;*

Remarque 15. Cette caractérisation explique que certains auteurs utilisent le terme *fermée* à la place de *semi-continue inférieurement.*

Exemple 9. Soit C un convexe de E. La fonction indicatrice convexe i_C de C est semi-continue inférieurement si et seulement si C est fermé.

Démonstration. On ne montre que (iii) $\Longrightarrow$ (i), le reste est laissé en exercice. Soit f une fonction vérifiant (iii), $x \in E$ et (x_n) une suite de points de E qui converge vers x. Il existe alors une sous-suite x_{n_k} telle que $\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = \liminf_{n\to+\infty} f(x_n)$. Comme les points $(x_{n_k}, f(x_{n_k}))$ sont dans $\mathrm{epi}(f)$ et que cet ensemble est fermé, on en déduit que $(x, \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k})) \in \mathrm{epi}(f)$, c'est-à-dire

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = \liminf_{n\to+\infty} f(x_n) \geq f(x). \qquad \square$$

Proposition 51. *Soit* E *un espace vectoriel normé.*

(i) Si $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *sont sci et* $s, t \geq 0$*, alors* $sf + tg$ *est sci.*

(ii) Le suprémum d'une famille quelconque de fonctions sci est une fonction sci.

Définition 18. Soit E un espace vectoriel normé et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction.

— On appelle *enveloppe convexe sci* de f, et on note $\overline{\mathrm{conv}} f$ le supremum des minorantes convexes et semi-continue inférieurement de f :

$$\overline{\mathrm{conv}} f(x) = \sup\{g(x); g : E \to \overline{\mathbb{R}} \text{ convexe et sci tq } g \leq f\}$$

— On appelle minorante affine continue de f toute fonction affine continue $\phi + \alpha$, avec $\phi \in E^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ telle $f \geq \phi + \alpha$.

Théorème 52. *Toute fonction convexe* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *semicontinue inférieurement est égale au supremum de ses minorantes affines continues, c'est-à-dire*

$$f(x) = \sup\{\phi(x) + \alpha \mid \phi \in E^*, \alpha \in \mathbb{R},\ f \geq \phi + \alpha\}.$$

Démonstration. Si $\mathrm{dom} f = \emptyset$, f est constante et égale à $+\infty$ et il n'y a rien à montrer. Supposons donc $\mathrm{dom} f \neq \emptyset$, ou de manière équivalente que $C = \mathrm{epi}(f)$ est un convexe fermé non vide de $E \times \mathbb{R}$. Posons

$$g(x) = \sup\{\phi(x) + \alpha \mid \phi \in E^*, \alpha \in \mathbb{R},\ \forall y \in E, f(y) \geq \phi(y) + \alpha\}.$$

Par définition, $g \leq f$, il reste donc à montrer l'inégalité inverse, c'est-à-dire que pour tout x_0 dans E et tout $t_0 < f(x_0)$, $g(x_0) \geq t_0$. Si $t_0 < f(x_0)$, le point (x_0, t_0) n'appartient pas au convexe fermé $C := \mathrm{epi}(f)$. Il existe donc une forme linéaire continue sur $E \times \mathbb{R}$ séparant strictement C de (x_0, t_0), c'est-à-dire $(\phi, v) \in E^* \times \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall (x, t) \in \mathrm{epi}(f), \quad \phi(x) + tv \geq \phi(x_0) + t_0 v + \varepsilon$$

En particulier, on a

$$\forall x \in E, \quad vf(x) \geq \phi(x_0 - x) + t_0 v + \varepsilon.$$

En prenant $x = x_0$, on a $v(f(x_0) - t_0) \geq \varepsilon > 0$. Comme $f(x_0) > t_0$, ceci implique $v > 0$. Ainsi,

$$\forall x \in E, \quad f(x) \geq \frac{1}{v}\phi(x_0 - x) + t_0$$

La fonction g étant le supremum des minorantes affines continues de f, elle est supérieure au second membre de l'inégalité précédente, c'est-à-dire.

$$g(x) \geq \frac{1}{v}\phi(x_0 - x) + t_0,$$

En particulier, ceci montre que $g(x_0) \geq t_0$. □

Corollaire 53. *L'enveloppe convexe sci d'une fonction $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ est donnée par la formule*

$$\overline{\mathrm{conv}} f(x) = \sup\{\phi(x) + \alpha; \phi \in E^*, \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall y \in E, f \geq \phi + \alpha\}.$$

Exemple 10. Une fonction f est convexe et semi-continue inférieurement si et seulement si elle coïncide avec supremum de ses minorantes affines.

Exemple 11. Une fonction sous-linéaire semi-continue inférieurement $f : E \to \mathbb{R}$ est égale au supremum de ses minorantes linéaires.

Démonstration de l'exemple. La fonction f est en particulier convexe et semi-continue inférieurement et elle est donc égale au supremum de ses minorantes affines. Soit $\phi + \alpha$, $\phi \in E^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ une minorante affine de f, i.e.

$$\forall x \in E, \ \phi(x) + \alpha \leq h(x).$$

Alors, par homogénéité,

$$\forall x \in E, \forall t > 0, \ t\phi(x) + \alpha \leq tf(x).$$

En divisant par t et en faisant tendre t vers $+\infty$, ceci montre que $\phi \leq f$. □

3.1.5 Topologie faible et optimisation

Définition 19 (Convergence faible). (i) Soit E un espace vectoriel normé. Une suite (x_n) *converge faiblement* vers un point $x \in E$ si et seulement

$$\forall \phi \in E^*, \quad \lim_{n \to \infty} \langle \phi | x_n \rangle = \langle \phi | x \rangle.$$

On écrira $x_n \xrightarrow{f} x$ si x_n converge faiblement vers x.

(ii) Un ensemble $C \subseteq E$ est dit *faiblement fermé* toute limite faible de points de C est inclue dans C.

(iii) Une fonction $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ est faiblement semi-continue inférieurement si et seulement si

$$\forall x \in E,\ \forall x_n \xrightarrow{f} x,\ \liminf_{n \to \infty} f(x_n) \geq f(x).$$

Remarque 16. Un ensemble faiblement fermé est fortement fermé, mais la réciproque est fausse en général.

Proposition 54. *Soit C un ensemble convexe fermé (fortement) de E. Alors C est aussi faiblement fermé.*

Démonstration. Supposons que $x_n \in C \xrightarrow{f} x$ et que $x \notin C$. Par théorème de Hahn-Banach, on peut séparer le convexe fermé C et du point x fortement : il existe $\phi \in E^*$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\forall z \in C, \langle \phi | z \rangle + \varepsilon \leq \langle \phi | x \rangle.$$

Alors, en particulier, $\limsup \langle \phi | x_n \rangle < \langle \phi | x \rangle$, ce qui contredit la convergence faible de x_n vers x. □

Exemple 12 (Lemma de Mazur). Soit E un espace vectoriel normé, $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite convergent faiblement vers un point $x \in E$. Alors, il existe une suite $y_k \in \mathrm{conv}(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\})$ convergeant fortement vers x.

Démonstration. Soit $A = \mathrm{conv}(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\})$ et $C = \bar{A}$. L'ensemble convexe C est fermé fortement, et donc également fermé faiblement. Comme x est la limite faible des x_n, x appartient à C, de sorte qu'il existe une suite $y_k \in A$ qui converge vers x. □

Corollaire 55. *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction convexe (fortement) semi-continue inférieurement. Alors, f est faiblement semi-continue inférieurement.*

Démonstration. Comme f est convexe et semi-continue inférieurement, tout ses sous-niveau $\{f \leq \alpha\}$ sont convexes et fortement fermés. Par la proposition précédente, les sous-niveaux de f sont aussi faiblement fermés, et f est dons faiblement semi-continue inférieurement. □

Exemple 13. En particulier, toute fonction convexe fortement continue (comme la norme de l'espace) est faiblement sci.

Exemple 14. Soit H un espace de Hilbert et $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe fortement semi-continue inférieurement et *coercive*, c'est-à-dire que

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} = +\infty.$$

Alors f admet un minimiseur global sur H.

Démonstration. Soit $R > R_0 := \inf_H f$. Soit $(x_n) \in H$ une suite minimisante, c'est-à-dire telle que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = R_0$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que (x_n) appartient à l'ensemble $C := \{f \leq R\}$, qui par coercivité de f est borné. Dans un espace de Hilbert, toute suite bornée admet une sous-suite convergeant faiblement, et on suppose donc $x_n \xrightarrow{f} x \in E$. De plus, comme f est fortement sci et convexe elle est faiblement sci, de sorte que $R_0 = \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x)$. Ainsi, la fonction f admet un minimiseur global sur E. □

Exemple 15. Soit C un convexe fermé d'un espace de Hilbert H, et $x \in H$. La fonction $f : y \in H \mapsto \|x - y\|$ est évidemment coercive, et la fonction $F : y \in H \mapsto \|x - y\| + i_C(x)$ est donc aussi. La fonction F est convexe et sci fortement et elle est donc sci faiblement. Par la propriété précédente, F admet un minimiseur global sur H : ceci implique

$$\inf_{y\in H} F(y) = \inf_{y\in C} \|x - y\| = \min_{y\in C} \|x - y\|,$$

c'est-à-dire l'existence d'une projection sur C.

3.2 Conjuguée de Legendre-Fenchel

3.2.1 Conjuguée de Legendre-Fenchel

Définition 20. Soit E un espace vectoriel normé et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre $(\mathrm{dom}(f) \neq \emptyset)$. On définit sa conjuguée de Legendre-Fenchel par $f^* : E^* \to \overline{\mathbb{R}}$ par

$$f^*(\phi) = \sup_{x\in E} \langle \phi | x \rangle - f(x).$$

L'application $\mathcal{L} : f \mapsto f^*$ est appelée transformation de Legendre-Fenchel de f. On notera parfois $\mathcal{L}f$ pour la conjuguée de f.

Remarque 17. Comme f est propre, il existe $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$. Ainsi,

$$\forall \phi \in E^*, \quad f^*(\phi) \geq \langle \phi | x_0 \rangle - f(x_0),$$

et f^* est minorée par une fonction affine sur E^*. En particulier, $f^* > -\infty$.

Exemple 16. Commençons par quelques exemples de calculs de conjuguées.

(i) Soit A un ensemble non-vide de E, et i_A sa fonction indicatrice ($i_A = 0$ sur A et $+\infty$ hors de A). Alors,

$$\forall \phi \in E^*, \quad i_A^*(\phi) = \sup_{x\in E} \langle \phi | x \rangle - i_A(x) = \sup_{x\in A} \langle \phi | x \rangle = \mathrm{h}_A$$

On peut donc voir la conjuguée de Legendre-Fenchel comme une généralisation de l'application qui à un convexe associe sa fonction support.

(ii) Soit $f = \|.\|$ la norme de l'espace E. Alors,

$$\forall \phi \in E^*, f^*(\phi) = \sup_{x\in E} \langle \phi|x\rangle - \|x\|$$

Si $\|\phi\|_* > 1$, il existe un point x dans E tel que $\langle \phi|x\rangle - \|x\| > 0$. En multipliant x par λ, on voit que $f^*(\phi)$ vaut $+\infty$. Au contraire, si $\|\phi\|_* \leq 1$, $\langle \phi|x\rangle - \|x\| \leq 0$ avec égalité lorsque $x = 0$. Ainsi, $f^*(\phi) = 0$. Conclusion : f^* est la fonction indicatrice convexe de la boule unité pour la norme duale, i.e. $f^* = i_B$ où $B = \{\phi \in E^* \mid \|\phi\|_* \leq 1\}$.

(iii) Soit $f = \phi_0$ une forme linéaire sur E. Alors,

$$f^*(\phi) = \sup_{x\in E} \langle \phi|x\rangle - \phi_0(x)$$

Si deux formes linéaires sont différentes, alors $\sup_{x\in E}(\phi - \phi_0)(x) = +\infty$. Ainsi, $f^*(\phi) = +\infty$ si $\phi \neq \phi_0$. Au contraire, $f^*(\phi_0) = 0$. Conclusion, $f^* = i_{\{\phi_0\}}$.

(iv) Soit $f(x) = \frac{1}{p}|x|^p$ sur $\mathbb{R}$. On identifie $\mathbb{R}^*$ avec lui même. Pour $y \geq 0$, on a

$$f^*(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}} xy - \frac{1}{p}|x|^p = \sup_{x\geq 0} xy - \frac{1}{p}x^p$$

On peut calculer le supremum de la fonction $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto xy - \frac{1}{p}x^p$, qui est concave, en annulant sa dérivée :

$$\frac{\partial}{\partial x}(xy - \frac{1}{p}x^p) = y - x^{p-1} = 0 \Longrightarrow x = y^{1/(p-1)}$$

Ainsi, avec $q = p/(p-1)$, on a (le cas $y \leq 0$ se traitant de manière analogue)

$$\begin{aligned} \forall y \in \mathbb{R}, \quad f^*(y) &= \sup_{x\in\mathbb{R}} xy - \frac{1}{p}|x|^p \\ &= y^{1+1/(p-1)} - \frac{1}{p}y^{p/(p-1)} = (1-1/p)y^{p/(p-1)} = 1/q\,|y|^q \end{aligned}$$

Proposition 56. *La conjuguée de Legendre-Fenchel d'une fonction $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ propre vérifie :*

(i) Inégalité de Fenchel-Young : $\forall x \in E, \forall \phi \in E^*, \; f(x) + f^*(\phi) \geq \langle \phi|x\rangle$.

(ii) $f^*(0) = \sup -f = -\inf f$.

(iii) f^* est propre si et seulement si f est minorée par une fonction affine continue.

Exemple 17. Inégalité de Hölder : avec $f(x) = \frac{1}{p}|x|^p$ pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$xy \leq f(x) + f^*(y) = \frac{1}{p}|x|^p + \frac{1}{q}|x|^q$$

En sommant, on obtient que pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, si $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$,

$$\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \frac{1}{p}\|x\|_p + \frac{1}{q}\|y\|_q == \|x\|_p \|y\|_q\,.$$

Par homogénéité, cette inégalité reste vraie pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Hypothèse	**Conclusion**	**Remarque**
$f(x) \leq g(x)$	$f^*(\phi) \geq g^*(\phi)$	
$g(x) = i_C(x)$	$g^*(\phi) = h_C(\phi)$	
$g(x) = \|x\|_E$	$g^*(\phi) = \begin{cases} 0 \text{ si } \|\phi\|_* \leq 1 \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}$	
$g(x) = \|x\|_H^2$	$g^*(\phi) = \|\phi\|_H^2$	H = Hilbert
$g(x) = \phi_0(x), \phi_0 \in E$	$g^*(\phi) = i_{\{\phi_0\}}(\phi)$	
$g(x) = f(\lambda x), \lambda \neq 0$	$g^*(\phi) = f^*(\phi/\lambda)$	
$g(x) = \lambda f(x), \lambda > 0$	$g^*(\phi) = \lambda f^*(\phi/\lambda)$	
$g(x) = f(x+b), b \in E$	$g^*(\phi) = f^*(\phi) - \langle \phi \vert b \rangle$	
$h(x) = f \square g(x)$	$h^*(\phi) = f^*(\phi) + g^*(\phi)$	cf Prop. 61

TABLE 3.1 – Quelques règles pour calculer la conjuguée de Legendre d'une fonction.

Proposition 57. *Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre sur un espace vectoriel normé E. Alors, la conjuguée de f est convexe et semi-continue inférieurement sur E^* pour la topologie induite par la norme duale.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que, $x \in E$ étant fixé, l'application $\phi \in E^* \mapsto \langle \phi | x \rangle$ est linéaire et continue sur E^*. Ainsi, f^* s'écrit comme un supremum de fonctions affines continues sur E^*, et est donc convexe et sci. □

Proposition 58. *Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ convexe, semi-continue inférieurement et propre. Alors, f^* est convexe, semi-continue inférieurement et propre.*

Démonstration. Comme f est convexe semi-continue inférieurement et propre, elle est égale au suprémum de ses minorantes affines continues. En particulier, il existe une forme linéaire $\phi_0 \in E^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $f \geq \phi_0 + \alpha$. Ainsi,

$$f^*(\phi_0) = \sup_{x \in E} \langle \phi_0 | x \rangle - f(x) \leq \alpha,$$

et f^* est donc bien propre. □

3.2.2 Bi-conjuguée de Legendre-Fenchel

Définition 21 (Biconjuguée)**.** Soit E un espace vectoriel normé et $g : E^* \to \mathbb{R}$.

On notera $\mathcal{L}^*g$ la conjuguée de Legendre inverse de g, définie par

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^*g : &E \to \mathbb{R}\\ &x \mapsto \sup_{\phi \in E^*} \langle x|\phi\rangle - g(\phi).\end{aligned}$$

La bi-conjuguée de Legendre-Fenchel d'une fonction $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ est la fonction $f^{**} = \mathcal{L}^*\mathcal{L}f$, qui est donc définie par

$$f^{**}(x) = \sup_{\phi \in E^*} \langle \phi|x\rangle - f^*(\phi).$$

Lemme 59. *Pour toute fonction $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ on a $f^{**} \leq f$.*

Démonstration. Par inégalité de Young, pour tout $x \in E$ et $\phi \in E^*$ on a

$$f(x) + f^*(\phi) \geq \langle \phi|x\rangle.$$

En appliquant cette inégalité à la définition de f^{**} on obtient bien

$$f^{**}(x) = \sup_{\phi \in E^*} \langle \phi|x\rangle - f^*(\phi) \leq f(x). \qquad \square$$

Théorème 60 (Fenchel-Moreau)**.** *Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre. Alors, $f^{**} = \overline{\mathrm{conv}} f$. En particulier $f = f^{**}$ si et seulement si f est convexe sci.*

Remarque 18. Ce théorème implique en particulier que l'application qui à une fonction convexe propre et sci associe sa conjuguée de Legendre-Fenchel est injective.

Démonstration. On sait déjà que $f^{**} \leq f$ et que f^{**} et sci, on a $f^{**} \leq \overline{\mathrm{conv}}(f)$. Pour montrer l'autre inégalité, on utilise le fait que $\overline{\mathrm{conv}} f$ est égale au supremum des minorantes affines continues de f. l suffit donc de montrer que f^{**} est plus grande que toute minorante affine continue de f. On suppose donc $f \geq \phi_0 + \alpha$ où $\phi_0 \in E^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que

$$f^*(\phi_0) = \sup_{x \in E} \langle \phi_0|x\rangle - f(x) \leq \sup_{x \in E} \langle \phi_0|x\rangle - (\phi_0(x) + \alpha) = -\alpha.$$

Ainsi,

$$\forall x \in E, \quad f^{**}(x) = \sup_{\phi \in E^*} \langle \phi|x\rangle - f^*(\phi) \geq \langle \phi_0|x\rangle - f^*(\phi_0) = \langle \phi_0|x\rangle + \alpha. \qquad \square$$

3.2.3 Transformée de Legendre-Frenchel et inf-convolution

Définition 22. Soient $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions propres définies sur un espace vectoriel E. L'inf-convolée de f et g est la fonction $f \Box g : E \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

définie par

$$f\square g(x) = \inf_{\substack{u+v=x\\ u,v\in E}} f(u) + g(v) = \inf_{y\in E} f(y) + g(x-y).$$

Proposition 61. *Soient $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions admettant une même minorante affine. Alors, $f\square g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ est convexe, propre et $(f\square g)^* = f^* + g^*$*

Démonstration. Il suffit de choisir une forme linéaire $\phi \in E^*$, et de calculer :

$$\begin{aligned}
(f\square g)^*(\phi) &= \sup_{x\in E}\langle\phi|x\rangle - \inf_{x_1+x_2=x} f(x_1) + g(x_2)\\
&= \sup_{x_1,x_2\in E} \langle\phi|x_1 + x_2\rangle - (f(x_1) + g(x_2))\\
&= \sup_{x_1\in E} \langle\phi|x_1\rangle - f(x_1) + \sup_{x_2\in E} \langle\phi|x_2\rangle - g(x_2)\\
&= f^*(\phi) + g^*(\phi).
\end{aligned}$$

□

Exemple 18. Soit C un convexe fermé d'un espace vectoriel normé E, et

$$\mathrm{d}_C(x) := \inf_{y\in C} \|x-y\| = \inf_{y\in E} \|x-y\| + i_C(y) = (\|.\| \square i_C)(x).$$

Alors, $\mathrm{d}_C^* = i_C^* + \|.\|^* = \mathrm{h}_C + i_{B^*}$ où $B^* = \{\phi \in E^* \mid \|\phi\|_* \le 1\}$.

3.3 Sous-différentiel

Définition 23. Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction sur un espace vectoriel normé et soit x_0 un point de son domaine. Une forme linéaire $\phi \in E^*$ est appelée *sous-gradient* de f en $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$ si

$$\forall y \in E,\ f(y) \ge f(x_0) + \langle\phi|y - x_0\rangle.$$

L'ensemble des sous-gradients de f en x_0 est appelé *sous-différentiel* de f en x_0 et noté $\partial f(x_0)$. Pour un point x_0 n'appartenant pas au domaine de f, on pose $\partial f(x_0) := \emptyset$.

Exemple 19. (i) Le sous-différentiel de f en x_0 est toujours un convexe fermé.

(ii) Soit $f(x) = |v| = \max(x, -x)$. En identifiant $\mathbb{R}^*$ avec $\mathbb{R}$, on a

$$\partial f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0\\ 1 & \text{si } x > 0\\ [-1, 1] & \text{si x = 0}\end{cases}$$

(iii) Soit E un espace vectoriel normé et $f(x) = \|x\|$. Alors,

$$\phi \in \partial f(0) \iff \forall x \in E, \langle\phi|x\rangle \le \|x\| \iff \|\phi\|_* \le 1$$

Ainsi, $\partial\phi(0)$ est la boule unité dans l'espace dual.

(iv) Soit $f(x) = -\sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$. Alors, $\partial f(0) = \emptyset$ bien que 0 appartienne au domaine de f.

Lemme 62. *Une fonction $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ atteint son minimum global en x_0 si et seulement si $0 \in \partial f(x_0)$.*

Démonstration. On raisonne par équivalences :

$$\begin{aligned} x_0 = \arg\min_{x \in E} f(x) &\Longleftrightarrow \forall x \in E, f(x_0) + \langle 0 | x_0 - x \rangle \leq f(x) \\ &\Longleftrightarrow 0 \in \partial f(x_0) \end{aligned}$$

□

Proposition 63. *Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe et $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$. Le sous-différentiel peut être exprimé en fonction de la dérivée directionnelle :*

$$\partial f(x_0) = \{\phi \in E^* \mid f^+(x_0; \cdot) \geq \phi\}. \tag{3.4}$$

Démonstration. Soit A le second membre de l'égalité. Si $\phi \in A$, on a pour tout v dans E,

$$\phi(v) \leq f^+(x_0; v) = \inf_{t>0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \leq f(x_0 + v) - f(x_0)$$

Ainsi, en posant $y = x_0 + v$, on a $\langle \phi | y \rangle \leq f(y) - f(x_0)$ et donc $\phi \in \partial f(x_0)$. Réciproquement, supposons que $\phi \in \partial f(x_0)$. Alors, pour $v \in E$, $t > 0$ et $y = x_0 + tv$,

$$\langle \phi | y - x_0 \rangle \leq f(x_0 + tv) - f(x_0),$$

En divisant par t et en utilisant $y - x_0 = tv$, on a

$$\langle \phi | v \rangle = \phi(v) \leq \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

ceci étant vrai pour tout $t > 0$, on a bien $\phi(v) \leq f^+(x_0; v)$ et donc $\phi \in A$. □

Théorème 64. *Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe propre semi-continue inférieurement et $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$. Si f est continue en x_0, alors*

(i) $\boxed{\partial f(x_0) \text{ est non vide}}$

(ii) $\boxed{\partial f(x_0) \text{ est un convexe fermé borné de } E^*.}$

(iii) La dérivée directionnelle de f peut être exprimée en fonction du sous-différentiel :

$$f^+(x_0; v) = \sup\{\langle \phi | v \rangle \mid \phi \in \partial f(x_0)\}.$$

(iv) La fonction f est Gâteaux-différentiable en x_0 si et seulement si $\partial f(x_0)$ est un singleton. Si $\partial f(x_0) = \{\phi\}$, alors $f^+(x_0; \cdot) = \phi$.

Démonstration. (i) La fonction $g = f^+(x_0;\cdot)$ est convexe et continue. Elle admet donc une minorante affine continue $\phi + \alpha$ où $\phi_0 \in E^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\forall x \in E, \quad \phi_0(x) + \alpha \leq g(x)$$

en posant $y = tx$, on a par sous-linéarité de g,

$$\forall y \in E, \forall t > 0 t(\phi_0(y) + \alpha/t) \leq tg(y)$$

en faisant tendre t vers $+\infty$ on obtient donc $g \geq \phi_0$. Par la proposition précédente on en déduit que ϕ_0 appartient au sous-différentiel $\partial f(x_0)$ qui est donc non vide.
(ii) Comme f est continue en x_0, elle est lipschitzienne au visinage de ce point. Ceci implique facilement que $f^+(x;v) \leq R\|v\|$, de sorte que si ϕ appartient au sous-différentiel de $\partial f(x_0)$ on a $\phi(v) \leq f^+(x,v) \leq R\|v\|$. Par définition de la norme duale, on a donc $\|v\|_* \leq R$.
(iii) Il est facile de voir que pour tout $\phi \in \partial f(x_0)$ on a $f^+(x_0;\cdot) \geq \phi$, d'où l'inégalité

$$f^+(x_0;v) \geq g(v) := \sup\{\langle\phi|v\rangle \mid \phi \in \partial f(x_0)\}.$$

Soit v un élément de E. On peut définir une forme linéaire ϕ sur la droite $\mathbb{R}v$ par $\phi(v) = tf^+(x_0;v)$. Par la version fonctionnelle du théorème de Hahn-Banach, ϕ peut être étendue en une forme linéaire sur l'espace entier telle que $\phi \leq f^+(x_0;\cdot)$, de sorte que $\phi \in \partial f(x_0)$. Ainsi, par définition de g on a $f^+(x_0;v) = \langle\phi|v\rangle \leq g(v)$.
(iv) Si f est Gâteaux-différentiable, alors $\phi_0 = f^+(x_0;\cdot)$ est linéaire, et la proposition précédente implique que $\partial f(x_0) = \{\phi_0\}$. Si $\partial f(x_0)$ est un singleton, alors par le point (iii), $f^+(x_0;\cdot)$ est linéaire continue, et f est donc Gâteaux-différentiable en x_0. □

3.3.1 Sous-différentiel et transformée de Legendre-Fenchel

Proposition 65. *Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe et $x_0 \in E$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\phi \in \partial f(x)$;
(ii) $f(x_0) + f^*(\phi) = \langle\phi|x_0\rangle$

Démonstration. On commence par remarquer qu'une forme linéaire continue ϕ appartient à $\partial f(x_0)$ si et seulement si

$$\begin{aligned}\forall y \in E, f(y) \geq f(x_0) + \langle\phi|y - x_0\rangle &\iff \forall y \in E, \langle\phi|y\rangle - f(y) \leq \langle\phi|x_0\rangle - f(x_0)\\ &\iff f^*(\phi) = \sup_{y\in Y}\langle\phi|y\rangle - f(y) \leq \langle\phi|x_0\rangle - f(x_0)\\ &\iff f^*(\phi) + f(x_0) \leq \langle\phi|x_0\rangle\end{aligned}$$

Avec l'inégalité de Fenchel-Young, on sait que l'inégalité $f^*(\phi) + f(x_0) \geq \langle\phi|x_0\rangle$ est toujours vraie. Ceci montre l'équivalence entre (i) et (ii). □

Théorème 66. *Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe semi-continue inférieurement. Alors, pour tout $x \in E$ et tout $\phi \in E^*$, on a*

$$\phi \in \partial f(x) \Longleftrightarrow x \in \partial f^*(\phi).$$

Démonstration. Comme f est convexe et semi-continue inférieurement, on sait que $f^{**} = f$. Ainsi on a

$$\begin{aligned} \phi \in \partial f(x) &\Longleftrightarrow f(x) + f^*(\phi) = \langle \phi | x \rangle \\ &\Longleftrightarrow f^{**}(x) + f^*(\phi) = \langle \phi | x \rangle \\ &\Longleftrightarrow \phi \in \partial f^*(x), \end{aligned}$$

où l'on a appliqué le critère de la proposition précédente à la fonction f^*. □

Corollaire 67. *Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe propre semi-continue inférieurement. Alors, (i) implique (ii) où*

(i) $f = f^{**}$ est strictement convexe sur son domaine ;

(ii) pour tout $\phi \in \mathrm{dom}(f^*)$, $\mathrm{Card}(\partial f^*(\phi)) \leq 1$.

Démonstration. Supposons f strictement convexe sur son domaine et montrons (ii). Par l'absurde, supposons qu'il existe $\phi \in \mathrm{dom}(f^*)$ et $x_0 \neq x_1$ tels que $x_0, x_1 \in \partial f^*(\phi)$. Alors, par convexité du sous-différentiel, le segment $x_t = (1-t)x_0 + tx_1$ appartient à $\partial f^*(\phi)$, et donc

$$\forall t \in [0,1],\ \ f^*(\phi) = \langle \phi | x_t \rangle - f(x_t) = \langle \phi | x_0 \rangle - f(x_0) = \langle \phi | x_1 \rangle - f(x_1)$$

Ainsi, f est linéaire sur le segment, ce qui contredit sa stricte convexité. □