# Chapitre 1

# Ensembles convexes

## 1.1 Ensembles convexes et enveloppe convexe

Pour définir la notion d'ensemble convexe, il faut pouvoir considérer des combinaisons linéaires entre paires de points dans l'espace ambiant. Dans un premier temps, on supposera que $E$ est un espace vectoriel (réel), éventuellement de dimension infinie, et sans structure additionnelle. La plupart des résultats de ce chapitre peuvent êtres retrouvés dans le livre *Fundamentals of convex analysis* de Hiriart-Urruty et Lemaréchal.

### 1.1.1 Définition et exemples

**Définition 1.** Une sous-ensemble $X$ d'un espace vectoriel $E$ est dit

(i) *affine* ssi $\forall (x,y) \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R},\ (1-\alpha)x + \alpha y \in X$.

(ii) *convexe* ssi $\forall (x,y) \in X, \forall \alpha \in [0,1],\ (1-\alpha)x + \alpha y \in X$.

Autrement dit, un ensemble est affine (resp. convexe) s'il contient toute droite (resp. tout segment) passant par deux de ses points.

*Exemple* 1. Nous commençons par quelques exemples élémentaires.

(i) Tout ensemble affine est convexe.

(ii) Soit $\|\cdot\|$ une norme sur l'espace vectoriel $E$. Pour tout $x \in E$ et $r \geq 0$, la boule centrée en $x$ et de rayon $r$ (ouverte ou fermée) est convexe :

$$\mathrm{B}(x,r) := \{y \in E \mid \|x-y\| \leq r\}.$$

(iii) Pour toute forme linéaire $\phi : E \to \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, le sous-niveau $\{x \in E; \phi(x) \leq b\}$ est un ensemble convexe appelé *demi-espace*.

**Proposition 1.** *(i) L'intersection $\cap_{i\in I} K_i$ d'une famille quelconque $(K_i)_{i\in I}$ de convexes est convexe.*

*(ii) Le produit cartésien de deux ensembles convexes est convexe.*

*(iii) L'image directe (resp. réciproque) d'un convexe par une application linéaire*

*est convexe.*

*Démonstration.* Exercice. □

*Exemple* 2. (i) Étant données une famille de formes linéaires $(\phi_i)_{i\in I}$ sur $E$ et une famille de réels $(b_i)_{i\in I}$, l'ensemble $K = \{x \in E \mid \forall i,\ \phi_i(x) \leq b_i\}$ est convexe. Si la famille $I$ est fini, on dit que $K$ est un *polyèdre convexe.*

(ii) Soit $\mathcal{S}_n$ l'espace vectoriel des matrices symétriques sur $\mathbb{R}^n$, et $\mathcal{S}_n^+$ l'ensemble des matrices symétriques positives. Alors, $\mathcal{S}_n$ est affine et $\mathcal{S}_n^+$ est convexe :

$$\mathcal{S}_n^+ = \bigcap_{x\in\mathbb{R}^d} \{S \in \mathcal{S}_n \mid \langle x|Sx\rangle \geq 0\},$$

car l'application $S \in \mathcal{S}_n \mapsto \langle x|Sx\rangle$ est linéaire.

(iii) Soit $K$ l'ensemble de $\mathbb{R}^n$ défini de la manière suivante :

$$K := \{(u(0), u'(0), \dots, u^n(0)) \mid u \in \mathcal{C}^n([-1,1]), u \text{ croissante}\}$$

Alors, $K$ est convexe, car $K = \phi(L)$ où $\phi(u) := (u(0), u'(0), \dots, u^n(0))$ est une forme linéaire et $L$ est un convexe de $E := \mathcal{C}^n([-1,1])$ comme intersection (non dénombrable) de demi-espaces

$$\begin{aligned} L &= \{u \in \mathcal{C}^n([-1,1]), u \text{ croissante}\} \\ &= \bigcap_{-1\leq x\leq y\leq 1} \{u \in E \mid u(x) \leq u(y)\}. \end{aligned}$$

**Définition 2.** La somme de Minkowski de deux sous-ensembles $X, Y$ d'un espace vectoriel est $X + Y := \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$. On définit de même le produit de $X$ par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $\lambda X = \{\lambda x \mid x \in X\}$.

Par un léger abus, lorsque $X$ est un ensemble et $y$ un vecteur, on notera

$$X + y = \{x + y \mid x \in X\} \quad \text{et} \quad X - y = \{x - y \mid x \in X\}.$$

**Proposition 2.** *Soient* $K_1, \dots, K_k \subseteq E$ *des convexes et* $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. *Alors* $\alpha_1 K_1 + \ldots + \alpha_k K_k$ *est convexe.*

*Démonstration.* On introduit l'application linéaire $\phi(x_1, \dots, x_k) = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k$, de sorte que $\alpha_1 K_1 + \ldots + \alpha_k K_k = \phi(K_1 \times \ldots \times K_k)$,. Alors, $\alpha_1 K_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_k K_k$ est convexe comme image d'un produit cartésien de convexes par une application linéaire. □

### 1.1.2 Enveloppe convexe, enveloppe affine

Rappelons qu'il existe deux définition équivalentes du sous-espace vectoriel de $E$ engendré par un ensemble $X \subseteq E$, qu'on notera $\operatorname{vect}(X)$. La première consiste à décrire $\operatorname{vect}(X)$ comme l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de $X$ :

$$\operatorname{vect}(X) = \{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k \mid k \geq 1, \alpha_i \in \mathbb{R}, x_i \in X\}.$$

La deuxième définition affirme que $\operatorname{vect}(X)$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant $X$, qui peut s'écrire

$$\operatorname{vect}(X) = \bigcap_{\substack{F \subseteq E \text{ s.e.v} \\ X \subseteq F}} F.$$

Notons bien qu'avec cette deuxième définition, il est immédiat que $\operatorname{vect}(X)$ est un sous-vectoriel de $E$ (car une intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.) La définition de l'enveloppe convexe et de l'enveloppe affine imite cette deuxième construction.

**Définition 3.** Soit $X$ une partie de $E$. L'enveloppe affine (resp. convexe) de $X$, notée $\operatorname{aff}(X)$ (resp $\operatorname{conv}(X)$), est l'intersection de tous les ensembles affines (resp. ensembles convexes) contenant $X$ :

$$\operatorname{aff}(X) = \bigcap_{\substack{A \subseteq E \text{ affine} \\ X \subseteq A}} A \quad \text{et} \quad \operatorname{conv}(X) = \bigcap_{\substack{K \subseteq E \text{ convexe} \\ X \subseteq K}} K.$$

Les deux propositions suivantes donnent des caractérisations plus maniables de l'enveloppe convexe et de l'enveloppe affine d'un ensemble $A \subseteq E$.

**Définition 4.** Soit $X$ un sous-ensemble d'un espace vectoriel $E$. On appelle :
(i) *combinaison affine* d'éléments de $X \subseteq E$ tout point de la forme $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_1 x_k$ où $k \geq 1$, $x_i \in X$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ et $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1$.
(ii) *combinaison convexe* d'éléments de $X \subseteq E$ tout point de la forme $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_1 x_k$ où $k \geq 1$, $x_i \in X$, $\alpha_i \geq 0$ et $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1$.

**Proposition 3.** *Un sous-ensemble $X$ de $E$ est convexe (resp. affine) si et seulement si il contient toute combinaison convexe (resp. affine) de ses éléments.*

*Démonstration.* On ne traite que le cas des ensembles convexe, le cas des ensembles affines étant analogue. Par définition, si $X$ contient toutes les combinaisons convexes de ses éléments alors en particulier il contient toute combinaison convexe de deux de ses éléments et est donc convexe.

Réciproquement, supposons que $X$ soit convexe, c-à-d qu'il contient les combinaisons convexes de deux éléments. Par récurrence, supposons que $X$ contienne les combinaisons convexes de $m$ éléments avec $m \geq 2$. Soient alors $x_1, \ldots, x_{m+1} \in X$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1} \geq 0$ tel que $\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i = 1$. Nous allons montrer que $x = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i x_i$ appartient à $X$ en utilisant l'hypothèse de récurrence. On sait qu'il existe $i$ tel que $\alpha_i < 1$ (sinon, il n'y a rien à démontrer). Quitte à réordonner les indices, on suppose que $\alpha_{m+1} < 1$ :

$$x = (1 - \alpha_{m+1})y + \alpha_{m+1}x_{m+1} \text{ avec } y := \left[\sum_{1 \leq i \leq m} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{m+1}} x_i\right]$$

Soit $\alpha'_i := \alpha_i/(1 - \alpha_{m+1}) \geq 0$, de sorte que $\sum_{1 \leq i \leq m} \alpha'_i = 1$. Le point $y$ est donc une combinaison convexe de $m$ éléments de $X$ et appartiens donc à $X$ par hypothèse de récurrence. Ainsi, $x = (1 - \alpha_{m+1})y + \alpha_{m+1}x_{m+1}$ est combinaison convexe de deux éléments de $X$ et appartient donc à $X$. $\square$

**Corollaire 4.** *Soit $X$ une partie de $E$. Alors, l'enveloppe convexe (resp. affine) de $X$ est égale à l'ensemble des combinaisons convexes (resp. combinaisons affines) d'éléments de $X$ :*

$$\operatorname{aff}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \mid k \geq 1, x_i \in X,\ \alpha_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \right\}, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \mid k \geq 1, x_i \in X,\ \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \right\}. \tag{1.2}$$

*Démonstration.* De même que précédemment, on se contente de démontrer l'énoncé concernant l'enveloppe convexe. Montrons d'abord que le second membre de (1.2), que nous noterons $B$, est convexe. Soient $x, y \in B$ et $\lambda \in [0, 1]$. Il existe alors $x_1, \ldots, x_n \in X$, $y_1, \ldots, y_m \in X$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$ et $\mu_1, \ldots, \mu_m \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \text{ et } y = \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i.$$

Ainsi, le point

$$\lambda x + (1 - \lambda)y = \lambda\alpha_1 x_1 + \cdots + \lambda\alpha_n x_n + (1 - \lambda)\mu_1 y_1 + \cdots + (1 - \lambda)\mu_m y_m$$

est à nouveau combinaison convexe de points de $X$ et appartient donc à $B$. Ainsi, $B$ est un convexe contenant $X$ de sorte que par définition de l'enveloppe convexe, on a $\operatorname{conv}(X) \subset B$.

Réciproquement, l'ensemble $\operatorname{conv}(X)$ est convexe et contient donc toute combinaison convexe de ses éléments. Comme $X \subseteq \operatorname{conv}(X)$, l'ensemble $\operatorname{conv}(X)$ contient fortiori toute combinaison convexe d'éléments de $X$. En d'autres termes, $B \subseteq \operatorname{conv}(X)$. $\square$

Le théorème suivant permet de limiter le nombre de terme à prendre dans la somme de la partie droite de (1.2) en dimension finie.

**Théorème 5** (Carathéodory)**.** *Soit $A$ une partie d'un espace vectoriel $E$ de dimension $n$. Alors tout élément de* $\mathrm{conv}(A)$ *peut s'écrire comme une combinaison convexe de $n+1$ éléments de $A$.*

*Démonstration.* Soit $x$ un point de $\mathrm{conv}(A)$, qui peut donc s'écrire comme une combinaison convexe de $m \geq 1$ éléments $x_i$ de $A$, c'est-à-dire, $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$ avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \geq 0$ et $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$. Si $m \leq n+1$, il n'y a rien à démontrer. Dans le cas contraire, il suffit de montrer que l'on peut écrire $x$ comme une combinaison convexe de $m-1$ des $x_i$, et l'on conclura par récurrence.

Soit $v_1 = x_1 - x_m, \ldots, v_{m-1} = x_{m-1} - x_m$. L'hypothèse $m-1 > n$ implique que la famille des $v_i$ est liée, et il existe donc $\kappa \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\sum_i \kappa_i v_i = 0$. Ainsi, en posant $\mu_i = \kappa_i$ pour $i < m$ et $\mu_m = -\sum_{i<m} \mu_i$ on a

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^m \mu_i x_i = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^m \mu_i = 0. \end{cases}$$

Étant donné $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $\alpha_i^\lambda = \alpha_i - \lambda \mu_i$. Alors,

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i^\lambda x_i = x \\ \displaystyle\sum_{i=1}^m \alpha_i^\lambda = 1 \end{cases}$$

Si l'on veut que la combinaison soit convexe, il faut que tout les $\alpha_i^\lambda$ soient positifs, c'est-à-dire $\lambda \in \Lambda$ où

$$\Lambda = \{\kappa \in \mathbb{R} \mid \forall i \in \{1, \ldots, m\}, \alpha_i - \kappa \mu_i \geq 0\}.$$

Cet ensemble est non-vide et fermé. De plus, comme les $(\mu_i)$ ne sont pas tous nuls et que leur somme est nulle, il existe un $i_0$ tel que $\mu_{i_0} > 0$ et alors $\Lambda$ est majoré par $\alpha_{i_0}/\mu_{i_0}$. Soit $\lambda^*$ le maximum de $\Lambda$. Par l'absurde, il est facile de voir qu'il existe $i_*$ tel que $\alpha_{i_*} - \lambda^* \mu_{i_*} = 0$. Ceci achève la démonstration : on a écrit $x$ comme combinaison convexe de $m-1$ des $m$ points originaux. □

*Exemple* 3. (i) Le théorème de Carathéodory affirme que pour tout point $x$ dans l'enveloppe convexe $\mathrm{conv}(A)$, il existe $x_0, \ldots, x_n \in A$ tel que $x$ soit une combinaison convexe des $(x_i)$. Cependant, il ne faut pas penser que les points $x_0, \ldots, x_n$ forment une base de $\mathrm{conv}(A)$, car ils dépendent du choix de $x \in K$. Comme exemple, prenons $A = \{(\pm 1, \pm 1)\}$ l'ensemble des sommets d'un carré. Tout point $x$ du carré $\mathrm{conv}(A)$ peut s'écrire comme combinaison convexe de trois points parmi les quatre points de $A$, mais le choix de ces trois points n'est pas unique et dépend de $x$.

(ii) Montrons que si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est compact, alors $C = \operatorname{conv}(A)$ est compact. L'application $\phi : A^{n+1} \times \Delta \to \mathbb{R}^n$ où $\Delta = \{\alpha \in \mathbb{R}_+^{n+1} \mid \alpha_0 + \ldots + \alpha_n = 1\}$ définie par

$$\phi(x_0, \ldots, x_n, \alpha) = \sum_{0 \le i \le n} \alpha_i x_i$$

est à valeur dans $C$. Par théorème de Carathéodory, cette application est surjective, donc $\phi(A^{n+1} \times \Delta_{n+1}) = C$. Conclusion : $C$ est compact, comme image d'un compact par une application continue.

## 1.2 Propriétés topologiques des convexes

Dans cette section, on s'intéresse à quelques propriétés topologiques simples des ensembles convexes. L'utilité de ces résultats apparaîtra plus clairement lors de l'étude de la continuité des fonctions convexes. Pour cela, on suppose que $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé, muni de la topologie induite par $\|.\|$. Étant donnée une partie $X$ de $E$, on notera $\operatorname{int}(X)$ son intérieur et $\operatorname{adh}(X)$ son adhérence.

### 1.2.1 Intérieur et adhérence d'un convexe

**Proposition 6.** *L'intérieur et l'adhérence d'un convexe $C$ sont convexes.*

**Lemme 7.** *Soient* $\mathrm{B}(x_0, r_0)$ *et* $\mathrm{B}(x_1, r_1)$ *deux boules dans un espace vectoriel normé. Alors* $(1-t)\mathrm{B}(x_0, r_0) + t\mathrm{B}(x_1, r_1) = \mathrm{B}((1-t)x_0 + tx_1, (1-t)r_0 + tr_1)$.

*Démonstration.* En remarquant que $\mathrm{B}(x, r) = x + \mathrm{B}(0, r)$, on a

$$\begin{aligned}(1-t)\mathrm{B}(x_0, r_0) + t\mathrm{B}(x_1, r_1) &= ((1-t)x_0 + (1-t)\mathrm{B}(0, r_0)) + (tx_1 + t\mathrm{B}(0, r_1) \\ &= ((1-t)x_0 + tx_1) + ((1-t)\mathrm{B}(0, r_0) + t\mathrm{B}(0, r_1))\end{aligned}$$

$$\mathrm{B}((1-t)x_0 + tx_1, (1-t)r_0 + tr_1) = ((1-t)x_0 + tx_1) + \mathrm{B}(0, (1-t)r_0 + tr_1)$$

Il nous reste donc à démontrer l'égalité

$$(1-t)\mathrm{B}(0, r_0) + t\mathrm{B}(0, r_1) = \mathrm{B}(0, (1-t)r_0 + tr_1).$$

L'inclusion $\subseteq$ est alors une conséquence directe de l'inégalité triangulaire, tandis que l'inclusion inverse provient de l'homogénéité de la norme. □

*Démonstration.* Montrons d'abord la convexité de l'intérieur. Soient $x_0,\ y_0 \in \operatorname{int}(C)$ et $t \in [0, 1]$. Si $A, B$ sont deux parties de $C$, alors par convexité, pour $\alpha \in [0, 1]$, $(1-\alpha)A + \alpha B \subseteq C$. Par définition de l'intérieur, il existe $r_0, r_1 > 0$ de sorte que les boules $B(x_i, r_i)$ soient contenues dans $C$. Alors,

$$\mathrm{B}((1-t)x_0 + tx_1, (1-t)r_0 + tr_1) = (1-t)\mathrm{B}(0, r_0) + t\mathrm{B}(0, r_1) \subseteq C.$$

Ceci implique que le point $(1-t)x_0 + tx_1$ est dans l'intérieur de $C$. Comme ceci est vrai pour toute paire de points de l'intérieur et pour $t \in [0,1]$, $\mathrm{int}(C)$ est donc convexe.

Passons à la convexité de l'adhérence. Soient $x$, $y \in \mathrm{adh}(C)$ et $\alpha \in [0,1]$. Alors, il existe des suites $(x_n)$ et $(y_n)$ d'éléments de $C$ convergeant respectivement vers $x$ et $y$. Ainsi $\alpha x_n + (1-\alpha)y_n$ appartient à $C$ et converge vers $\alpha x + (1-\alpha)y$ qui appartient donc à $\mathrm{adh}(C)$ qui est donc convexe. □

**Proposition 8.** *Soit $E$ un espace vectoriel normé et $C \subseteq E$ un convexe d'intérieur non vide. Alors, pour tout $x \in \mathrm{int}(C)$ et $y \in \mathrm{adh}(C)$, on a :*

$$[x,y[\; := \{(1-t)x + ty;\; 0 \leq t < 1\} \subseteq \mathrm{int}C$$

*Démonstration.* Comme $x$ est dans l'intérieur de $C$, il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(x,r)$ soit contenue dans $C$. Nous commençons par établir le résultat lorsque le point $y$ est dans $C$. Soit $t \in [0,1]$ et $x_t = (1-t)x + tz$, $r_t = (1-t)r$ ($r_t$ interpole entre $r_0 = r$ et $r_1 = 0$). Le Lemme 7 donne l'inclusion

$$\mathrm{B}(x_t, r_t) \subseteq C,$$

pour $t \in [0,1]$. Comme de plus, $r_t > 0$ lorsque $t < 1$, cela montre que le point $x_t$ est dans l'intérieur de $C$ pour $t < 1$. Dans le cas général, on note $(y_n)$ une suite de points de $C$ qui converge vers $y$, et $x_t^n = (1-t)x + ty_n$. Pour tout $n$, on a l'inclusion suivante (où le rayon $r_t$ ne dépends pas de $n$ !),

$$\mathrm{B}(x_t^n, r_t) \subseteq C.$$

En passant à la limite lorsque $n$ tends vers l'infini on obtient donc l'inclusion $\mathrm{B}(x_t, r_t) \subseteq C$, puis $x_t \in \mathrm{int}(C)$. □

**Corollaire 9.** *Soit $E$ un espace vectoriel normé et $C \subseteq E$ un convexe d'intérieur non vide. Alors*
*(i)* $\mathrm{adh}(\mathrm{int}C) = \mathrm{adh}(C)$
*(ii)* $\mathrm{int}(C) = \mathrm{int}(\mathrm{adh}(C))$

*Démonstration.* Nous démontrons le point (i) et laissons (ii) en exercice. Comme $\mathrm{int}(C) \subseteq C$, par monotonie de l'adhérence on a $\mathrm{adh}(\mathrm{int}(C)) \subseteq \mathrm{adh}(C)$. Reste donc la réciproque : soit $x$ un point dans $\mathrm{adh}(C)$ et $z \in \mathrm{int}(C)$ (on a supposé $C$ d'intérieur non vide). Alors, $x_t = (1-t)z + tx$ appartient à $\mathrm{int}(C)$ par le théorème précédent, et en passant à la limite lorsque $t \to 1$, on obtient bien $x \in \overline{\mathrm{int}(C)}$. □

*Remarque* 1. L'hypothèse que $C$ est d'intérieur non vide est cruciale. Soit en effet $C = [0,1] \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Alors, $\mathrm{adh}(C) = C$ tandis que $\mathrm{adh}(\mathrm{int}(C)) = \mathrm{adh}(\emptyset) = \emptyset$.

### 1.2.2 Intérieur relatif et dimension

En analyse convexe, on rencontre souvent des ensembles convexes dont l'intérieur est vide : c'est le cas d'un segment dans $\mathbb{R}^2$. La notion d'intérieur relatif permet de donner un sens à l'idée intuitive que l'intérieur d'un segment $[x, y] \subseteq \mathbb{R}^2$ est l'intervalle ouvert $]x, y[= \{(1-t)x + ty \mid 0 < t < 1\}$. Cette notion est le plus souvent utilisée lorsque l'enveloppe affine du convexe que l'on considère est de dimension finie.

**Définition 5.** Soit $X$ une partie d'un espace vectoriel $E$. L'intérieur relatif de $X$, noté $\mathrm{ri}(X)$, est l'intérieur de $X$ considéré comme sous-ensemble de l'espace métrique $(\mathrm{aff}(X), \|.\|)$. Cela signifie que

$$\mathrm{ri}(X) := \{x \in X \mid \exists r > 0 \text{ t.q. } (B(x, r) \cap \mathrm{aff}(X)) \subseteq X\}.$$

*Exemple* 4. Pour tout $x \in E$, $\mathrm{ri}(\{x\}) = x$.

*Exemple* 5. Soient $x_0 \neq x_1 \in E$, $\phi(t) = (1-t)x_0 + tx_1$ et $S = \phi([0, 1])$ le segment joignant $x_0$ à $x_1$. Alors, $\mathrm{aff}(S) = \phi(\mathbb{R})$, où $\phi$ est un homéomorphisme entre les espaces métriques $(\mathbb{R}, |.|)$ et $(\mathrm{aff}(S), \|.\|)$. Ainsi, $\mathrm{ri}(S) = \phi(\mathrm{int}([0, 1])) = \phi(]0, 1[)$ est le segment ouvert joignant les points $x_0$ et $x_1$.

Afin d'énoncer le théorème de cette partie, nous devons donner la définition de la dimension d'un ensemble affine. Celle-ci repose sur le lemme suivant.

**Lemme 10.** *Soit $A \subseteq E$ un sous-ensemble affine non vide. Alors,*
*(i) $\forall x_0 \in A$, l'ensemble $A - x_0$ est un sous-espace vectoriel de $E$.*
*(ii) $\forall x_0, x_1 \in A, \quad A - x_0 = A - x_1$.*

*Démonstration.* (i) Soit $E_{x_0} = A - x_0$, $u = x - x_0 \in E_{x_0}$, $v = y - x_0 \in E_{x_0}$. On veut montrer que pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, le vecteur $w := \lambda u + \mu v$ appartient à $E_{x_0}$, i.e. $w + x_0 \in A$. C'est bien le cas, car

$$\begin{aligned} w + x_0 = \lambda u + \mu v + x_0 &= \lambda(x - x_0) + \mu(y - x_0) + x_0 \\ &= \lambda x + \mu y + (1 - \lambda - \mu)x_0 \end{aligned}$$

est une combinaison affine de trois points de $A$, et appartient donc à $A$. Montrons maintenant (ii). Cette propriété est équivalente à $A = x_0 - x_1 + A$. Si $x$ est dans $A$, la somme $x_0 - x_1 + x$ est aussi dans $A$ comme combinaison affine d'éléments de $A$. Ceci montre l'inclusion $x_0 - x_1 + A \subseteq A$, et l'inclusion réciproque est démontrée de la même manière. □

Cet espace vectoriel $A - x_0$ est appelé espace tangent à $A$ en $x_0$. Le lemme précédent montre que l'espace tangent à un ensemble affine ne dépend pas du choix du point de base $x_0$. A fortiori, la dimension de l'espace tangent ne dépend pas non plus du choix du point $x_0$, et on l'appelle dimension de $A$.

**Définition 6.** La dimension d'un ensemble affine non-vide $A \subseteq E$, notée $\dim(A)$, est la dimension du sous-espace vectoriel $A - x_0$.

**Théorème 11.** *Soient $E$ un espace vectoriel normé, $K$ un convexe non vide de $E$ tel que* $\dim(\mathrm{aff}(K)) < +\infty$. *Alors l'intérieur relatif* $\mathrm{ri}(K)$ *est non vide.*

*Démonstration.* Soient $x_0$ un point de $K$, $E_{x_0} = \mathrm{aff}(K) - x_0$ et $n := \dim(E_{x_0})$.
**Étape 1 :** Montrons que $E_{x_0} = \mathrm{vect}(K - x_0)$. Un vecteur $v$ est dans $E_{x_0}$ s'il existe $x_1, \ldots, x_k \in K$ et des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ de somme 1 tels que

$$\begin{aligned} v &= (\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k) - x_0 \\ &= \alpha_1(x_1 - x_0) + \ldots + \alpha_k(x_k - x_0) \in \mathrm{vect}(K - x_0). \end{aligned}$$

Ceci démontre l'inclusion $E_{x_0} \subseteq \mathrm{vect}(K - x_0)$. Pour l'inclusion réciproque, on remarque que $E_{x_0} = \mathrm{aff}(K) - x_0$ est un sous-espace vectoriel de $E$ (par le lemme précédent) contenant $K - x_0$. Ainsi, $\mathrm{vect}(K - x_0) \subseteq E_{x_0}$.
**Étape 2 :** Comme $E_{x_0} = \mathrm{vect}(K - x_0)$, il existe une base de l'espace $E_{x_0}$ de la forme $(x_i - x_0)_{i=1,\ldots,n}$ où $x_1, \ldots, x_n$ sont des points de $K$. L'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^n &\to \mathrm{aff}(K) = x_0 + E_{x_0} \\ \alpha &\mapsto \phi(\alpha) = x_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i - x_0) = \left(1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i\right) x_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i - x_0) \end{aligned}$$

est une application continue bijective entre $\mathbb{R}^n$ et $\mathrm{aff}(K)$, et établit donc un homéomorphisme entre ces deux espaces. Soit maintenant

$$\Omega := \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n \alpha_i < 1 \text{ et } \alpha_i > 0 \right\}.$$

Par construction, tout élément de $\Omega$ est envoyé par $\phi$ sur une combinaison convexe d'éléments de $K$, i.e. $\phi(\Omega) \subseteq K$. De plus $\Omega$ est d'intérieur non vide et $\phi$ un homéomorphisme, de sorte que $\phi(\Omega)$ est un ouvert non vide de $(\mathrm{aff}(K), \|.\|)$ qui est contenu dans $K$. Ceci établit que $\mathrm{ri}(K) \neq \emptyset$. □

On peut aussi montrer un analogue de la proposition 8 pour l'intérieur relatif.

**Proposition 12.** *Soient $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $C$ un convexe non vide. Alors, pour tout $x \in \mathrm{ri}(C)$ et $y \in \mathrm{adh}(C)$, $[x, y[ \subseteq \mathrm{ri}(C)$.*

*Démonstration.* Soit $F = \mathrm{aff}(C)$. Par définition de l'intérieur relatif, il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(x, r) \subseteq C$. On suppose que $y$ est dans l'adhérence, le cas général se traitant de la même manière que dans la démonstration de la proposition 8. Pour tout $t \in [0, 1]$ et en utilisant les propriétés de la somme de Minkowski,

$$\mathrm{B}((1-t)x + ty, (1-t)r) \cap F = (1-t)(\mathrm{B}(x, r) \cap F) + ty \subseteq C.$$

Ainsi, pour $t \in [0, 1[$, le point $(1-t)x + ty$ est dans l'intérieur relatif de $C$. □