

Mini-symposium GAAD

Géométrie algorithmique et analyse géométrique de données

Mini-symposium porté par l'ANR GIGA et le groupe de travail SMAI-SIGMA

Résumé

Les problématiques liées à l'analyse de données géométriques sont en plein développement, aussi bien pour des applications en petite dimension (maillages ou nuages de points 3D) qu'en dimension plus grande (données obtenues par échantillonnage d'un espace de configurations de protéines, par exemple). Les outils issus de la géométrie algorithmique sont de plus en plus utilisés pour ces applications, qui appellent en retour des développements aussi bien pratiques que théoriques du domaine. Il s'agit de pouvoir traiter des jeux de données plus massifs, et vivant dans un espace ambiant de grande dimension. Le but de ce mini-symposium est de présenter plusieurs travaux récents dans cette direction, représentant trois sous-domaines de la géométrie algorithmique : (i) topologie algorithmique en grande dimension et reconstruction de surfaces (ii) construction de formules d'inclusion-exclusion adaptées à une famille d'ensembles et (iii) appariement de surfaces (shape matching) en utilisant l'opérateur de Laplace-Beltrami.

Organisateur(s)

1. **Quentin Mérigot**, Université de Grenoble / CNRS.

Liste des orateurs

1. **Dominique Attali**, Grenoble INP / CNRS
Titre : Reconstruction de formes en grandes dimensions.
2. **Xavier Goaoc**, Loria
Titre : Formules d'inclusion-exclusion simplifiées.
3. **Maks Ovsjanikov**, École Polytechnique / CNRS
Titre : Une approche fonctionnelle pour l'appariement de surfaces.

Quentin Mérigot, Laboratoire Jean Kuntzmann, 51 rue des Mathématiques, Campus de Saint Martin d'Hères BP 53, Grenoble Cedex 09, Quentin.Merigot@imag.fr

Dominique Attali, Gipsa-lab, 11 rue des Mathématiques, Campus de Saint-Martin d'Hères BP46, F-38402 Saint-Martin d'Hères Cedex, Dominique.Attali@gipsa-lab.grenoble-inp.fr

Xavier Goaoc, Loria, Bâtiment B, 615 rue du Jardin Botanique, 54600 Villers-lès-Nancy, goaoc@loria.fr

Maks Ovsjanikov, LIX, Bâtiment Alan Turing, École polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, maks@lix.polytechnique.fr

1 Reconstruction de formes en grandes dimensions

Dominique Attali

Collaboration avec André Lieutier et David Salinas.

Dans de nombreuses situations, la forme géométrique étudiée est uniquement connue au travers d'un ensemble fini de points éventuellement bruités qui l'échantillonnent. Il est alors souhaitable, à partir de l'unique donnée de ces points, de construire un modèle informatique qui reflète à la fois la géométrie et la topologie de la forme sous-jacente échantillonnée.

Dans cet exposé, nous verrons une approche pour reconstruire, qui retourne en sortie le complexe de Rips des points de données de paramètre r (pour un r bien choisi). Le complexe de Rips s'obtient en construisant dans un premier temps le graphe de voisinage des points, c'est-à-dire en connectant les points à distance moins de $2r$, puis en ajoutant toutes les cliques de ce graphe. Le complexe de Rips a ainsi une taille et une dimension généralement bien trop importantes pour en permettre une représentation explicite. Néanmoins, ce complexe est entièrement déterminé par le graphe de ses sommets et arêtes qui en fournit une forme de stockage compacte, au pire quadratique en le nombre de points et linéaire en la dimension ambiante. Ceci suggère de reconstruire une forme en calculant dans un premier temps le complexe de Rips des points de données (encodé par ses sommets et arêtes) puis de simplifier ce complexe par une séquence d'opérations élémentaires (voir figure 1) [3].

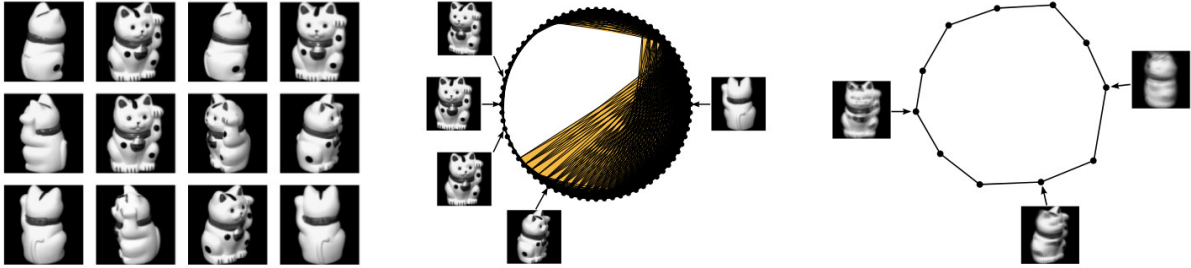


FIGURE 1 – À droite : 12 parmi les 72 photos d'une figurine prises à différents instants de sa rotation autour d'un axe. Au centre : complexe de Rips de l'ensemble des 72 images. À gauche : Courbe polygonale obtenue après simplification par contractions d'arêtes.

Nous présenterons des conditions permettant de garantir que le complexe de Rips reproduit effectivement le type d'homotopie de la forme échantillonnée [2, 1]. Puis, nous donnerons des conditions sous lesquelles ce complexe peut être transformé par une séquence de collapses en un objet homéomorphe à la forme de départ.

2 Formules d'inclusion-exclusion simplifiées

Xavier Goaoc.

Collaboration avec Jiří Matoušek, Pavel Paták, Zuzana Safernová et Martin Tancer [6].

Un sujet classique de cours d'introduction aux mathématiques discrètes est le *principe d'inclusion-exclusion*, aussi appelé *formule du crible*, qui exprime la mesure μ d'une union $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n$ de n ensembles en terme des mesures des intersections des F_i :

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n F_i\right) = \sum_{I: \emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \mu\left(\bigcap_{i \in I} F_i\right). \quad (1)$$

(Ici, $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ et $|I|$ désigne la cardinalité de l'ensemble I .) Au-delà de ses usages classiques en probabilités ou en combinatoire, ce principe intervient en algorithmique où il sous-tend notamment les meilleurs algorithmes connus pour différents problèmes NP-difficiles tel la coloration de graphe [4].

D'un point de vue algorithmique, la formule 1 a l'inconvénient de comporter un nombre de termes exponentiel en n . Si le recours à l'approximation permet dans une certaine mesure de réduire cette

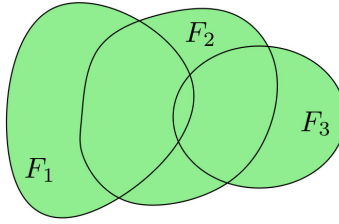


FIGURE 2 – Exemple de formule d’inclusion-exclusion. Comme $F_1 \cap F_3 = F_1 \cap F_2 \cap F_3$, la formule (1) se simplifie en $\mu(F_1 \cup F_2 \cup F_3) = \mu(F_1) + \mu(F_2) + \mu(F_3) - \mu(F_1 \cap F_2) - \mu(F_2 \cap F_3)$.

complexité, obtenir une bonne approximation demande néanmoins de sommer $\sim 2^{\sqrt{n}}$ termes dans le cas le pire [7]. Une alternative consiste à renoncer à l’*universalité* et, étant donnée une famille $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$, à chercher une formule d’inclusion-exclusion comportant peu de termes et étant exacte *pour cette famille*. La figure 2 illustre le type de simplification rendues possibles par le fait de fixer la famille, sur un exemple constitué de trois ensembles.

Systématiser cette idée permet d’obtenir, par exemple, des formules d’inclusion-exclusion de taille polynomiale en n pour des familles de boules de \mathbb{R}^d ; voir Dohmen [5] pour un tour d’horizon de ce sujet. De manière générale, considérons une famille $F = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ et notons m le nombre de régions de son *diagramme de Venn*. Nous montrons [6] qu’il existe une famille K de sous-ensembles de $[n]$ telle que tout élément de K a cardinalité au plus $\lceil 2e \ln m \rceil \lceil 1 + \ln \frac{n}{\ln m} \rceil$, K est fermée par sous-partie et

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n F_i\right) = \sum_{\emptyset \neq I \in K} (-1)^{|I|+1} \mu\left(\bigcap_{i \in I} F_i\right).$$

Une telle famille K peut en outre se calculer par un algorithme randomisé de complexité $O(|K|)$.

3 Une approche fonctionnelle pour l’appariement de surfaces

Maks Ovsjanikov

Collaboration avec Mirela Ben-Chen, Adrian Butscher, Frédéric Chazal, Leonidas Guibas et J. Solomon.

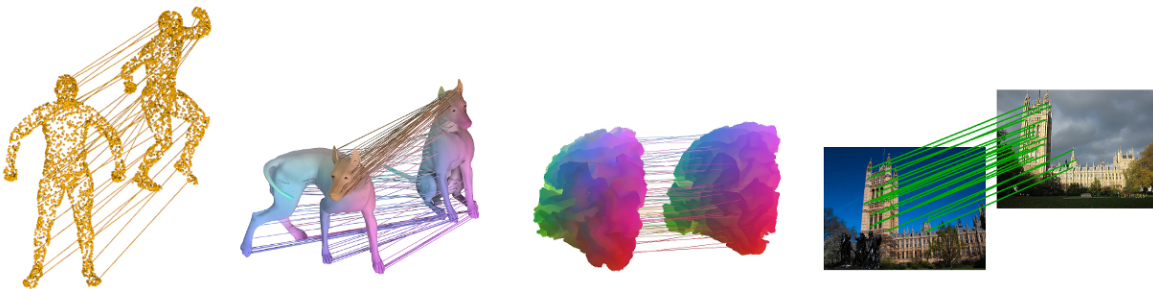


FIGURE 3 – Exemples de correspondances (applications) entre paires de forme géométrique, e.g. nuages des points, maillages, données 3D volumétriques et images.

L’appariement de formes est une opération fondamentale de l’analyse des données géométriques (cf. figure 3). Le développement de méthodes d’appariement rapides et robustes est d’autant plus important que la quantité de données disponible croît exponentiellement avec l’arrivée de technologies d’acquisition très grand public, des appareils photos intégrés aux téléphones portables au capteur 3D Microsoft Kinect. Dans l’exposé, nous considérerons plus particulièrement le problème de l’appariement de surfaces plonges, reliées par une déformation non nécessairement rigide. Ce problème est beaucoup plus difficile que celui de l’appariement rigide, entre autre à cause de l’absence de paramétrisation naturelle de l’espace des déformations non rigides et de la grande dimension de cet espace.

La plupart des méthodes précédentes pour l'appariement de formes non-rigides (e.g. [10, 11, 12]) se sont concentrées sur la manière d'optimiser une bijection entre deux ensembles de points mesurés sur chaque forme. Cette représentation rend la mise en correspondance difficile non seulement à cause de la taille de l'espace des solutions, mais aussi parce-que cette description discrète ne permet pas de décrire des solutions approchées naturellement. Finalement, les problèmes d'optimisation qui apparaissent sont non linéaires et non convexes.

Dans ce travail, au lieu de chercher une application entre deux formes, nous cherchons une application linéaire entre deux espaces de fonctions, définies sur chacune des formes [8]. Cette représentation est plus générale, et elle permet de décrire des correspondances approchées (qui ne proviennent pas nécessairement d'une application entre les formes). De plus, grâce à la structure vectorielle des espaces de fonctions, le problème d'appariement peut se formuler comme un simple système d'équations linéaires, qui est résolu très rapidement en pratique. Dans l'exposé, nous décrirons cette représentation fonctionnelle des correspondances et ses principales propriétés – notamment la possibilité d'encoder une correspondance par une matrice dont la taille ne dépend essentiellement pas du nombre des points décrivant les surfaces [8]. Nous verrons ensuite comment utiliser cette représentation pour formuler et résoudre le problème d'appariement non-rigide. Finalement, nous expliquerons comment visualiser ces correspondances [9], et comment on peut s'en servir pour définir une notion de “différences” entre les formes géométriques.

Références

- [1] D. ATTALI, A. LIEUTIER, D. SALINAS, *Vietoris-Rips complexes also provide topologically correct reconstructions of sampled shapes*, Computational Geometry : Theory and Applications (CGTA), vol. 46, 2012, p. 448–465.
- [2] D. ATTALI, A. LIEUTIER, *Reconstructing shapes with guarantees by unions of convex sets*, Proc. 26th Ann. Sympos. Comput. Geom., 2010, p. 344–353.
- [3] D. ATTALI, A. LIEUTIER, D. SALINAS, *Efficient data structure for representing and simplifying simplicial complexes in high dimensions*, International Journal of Computational Geometry and Applications (IJCGA), volume 22, 2012, p.279–303.
- [4] A. BJÖRKLUND, T. HUSFELDT, AND M. KOIVISTO, *Set partitioning via inclusion-exclusion*, SIAM Journal of Computing, vol. 39, 2009, p. 546–563.
- [5] T. HUSFELDT, *Improved Bonferroni inequalities via abstract tubes*, Lecture Notes in Mathematics, volume 1826, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [6] X. GOAOC, J. MATOUŠEK, P. PATÁK, Z. SAFERNOVÁ, AND M. TANCER, *Simplifying inclusion-exclusion formulas*, Preprint, arXiv :1207.2591, 2012.
- [7] J. KAHN, N. LINIAL, AND A. SAMORODNITSKY, *Inclusion-exclusion : exact and approximate*, Combinatorica, 16(4), 1996 p. 465–477.
- [8] M. OVSJANIKOV, M. BEN-CHEN, J. SOLOMON, A. BUTSCHER, L. GUIBAS, *Functional maps : a flexible representation of maps between shapes*, ACM Transactions on Graphics, 31(4), 2012, p. 1–11.
- [9] M. OVSJANIKOV, M. BEN-CHEN, F. CHAZAL, L. GUIBAS, *Visualization and analysis of maps between shapes*, Computer Graphics Forum, to appear.
- [10] A.M. BRONSTEIN, M.M., R. KIMMEL, *Generalized multidimensional scaling : a framework for isometry-invariant partial surface matching*, Proceedings of the National Academy of Science, 103(5), 2006, p. 1168–1172.
- [11] Y. LIPMAN, T. FUNKHOUSER, *Möbius voting for surface correspondence*, ACM Transactions on Graphics, 28(3), 2009, p. 1–12.
- [12] Y. SAHILIOĞLU, Y. YEMEZ, *Coarse-to-Fine Combinatorial Matching for Dense Isometric Shape Correspondence*, Computer Graphics Forum, 30(5), 2011, 1461–1470.