**Algorithmes d'optimisation – L3 MINT/DL 2017/2018 – Université Paris-Sud**

# Examen du 06/05/2019 (3h)

*Les documents sont interdits. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la correction. Vous pouvez bien sûr admettre les résultats d'une question pour traiter les questions suivantes.*
La partie numérique est disponible dans le répertoire `/commun/doc/merigot/M315.ipynb`

- **Le fichier `M315.ipynb` doit être copié dans le répertoire `reMise_copie` sur le bureau et renommé `M315-NUMERODECOPIE.ipynb`.**
- **Vous devez également indiquer votre n° de poste (`pXXeXX`) sur votre copie.**

## 1 Problème : minimisation de l'énergie de Dirichlet sous contraintes

Étant donnés trois entiers $1 < i_1 < i_2 < n$ on considère $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{i_1} \geq 1 \text{ et } x_{i_2} \leq -1\}$. L'objectif de ce problème est de résoudre le le problème de minimisation sous contraintes

$$(P) := \min_{x \in K} J(x), \text{ où } J(x) = \frac{1}{2} \|Gx\|^2, \tag{1}$$

et où on a noté $G$ la matrice possédant $n+1$ lignes et $n$ colonnes définie par

$$G_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } j = i-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que la norme euclidienne d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ est définie par $\|x\|^2 = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i^2$.

### 1.1 Étude théorique

**Question 1.** *Existence et unicité.* 1. Montrer que $K$ est convexe, fermé et non vide.
2. Montrer que $\nabla J(x) = Qx$ et $\mathrm{D}^2 J(x) = Q$ où $Q = G^T G$.
3. Démontrer que la matrice $Q$ est symétrique définie positive.
*(Indication : on pourra commencer par démontrer que* $\operatorname{Ker} G = 0$*).*
4. En déduire que le problème $(P)$ admet un unique minimiseur, que l'on notera $x^*$.

**Question 2.** *Conditions d'optimalité.* 1. Mettre la contrainte sous la forme

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c_1(x) \leq 0 \text{ et } c_2(x) \leq 0\},$$

où les fonctions $c_1, c_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont à déterminer.
2. Montrer que si l'on pose $x_0 = x_{n+1} = 0$, alors $\frac{\partial J}{\partial x_i}(x) = -x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq n$.

3. Écrire les quatre conditions d'optimalité données par le théorème KKT. En déduire que si $x^*$ est minimiseur du problème (1), alors

$$\begin{cases} x_i^* = \frac{1}{2}(x_{i-1}^* + x_{i+1}^*) & \forall i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, i_2\} \\ \frac{1}{2}(x_{i_1-1}^* + x_{i_1+1}^*) \leq x_{i_1}^* \\ \frac{1}{2}(x_{i_2-1}^* + x_{i_2+1}^*) \geq x_{i_2}^* \end{cases}$$

4. On définit $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ de la manière suivante, :

$$\bar{x}_i = \begin{cases} \frac{i}{i_1} & \text{si } 1 \leq i \leq i_1 \\ 1 - 2\frac{i-i_1}{i_2-i_1} & \text{si } i_1 \leq i \leq i_2 \\ -1 + \frac{i-i_2}{n-i_2} & \text{si } i_2 \leq i \leq n \end{cases}.$$

   En utilisant le théorème KKT, démontrer que $\bar{x}$ est l'unique minimiseur de (1).

## 1.2 Première approche : algorithme du gradient projeté

**Question 3.** *Projection sur l'ensemble $K$.*

1. Rappeler la définition et la caractérisation donnée en cours de la projection d'un point de $\mathbb{R}^n$ sur un convexe fermé.
2. Démontrer que la projection de $x \in \mathbb{R}^n$ sur $K$ est donnée par :

$$p_K(x) = (x_1, \ldots, x_{i_1-1}, \max(x_{i_1}, 1), x_{i_1+1}, \ldots, x_{i_2-1}, \min(x_{i_2}, -1), x_{i_2+1}, \ldots, x_n).$$

Étant donnés $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et $\tau > 0$, on considère l'algorithme de gradient projeté :

$$\begin{cases} d^{(k)} = -Qx^{(k+1)} \\ x^{(k+1)} = p_K(x^{(k)} + \tau d^{(k)}) \end{cases}$$

que l'on peut également mettre sous la forme

$$x^{(k+1)} = p_K(x^{(k)} - \tau \nabla J(x^{(k)}))$$

**Question 4.** *Convergence de l'algorithme.* On admet que les valeurs propres de $Q = G^T G$ appartiennent $]0, 4[$, et on suppose que $0 < \tau < \frac{1}{2}$.

1. Montrer que les valeurs propres de $\mathrm{Id}_n - \tau Q$ sont dans $]-1, 1[$. En déduire que les applications $S : x \mapsto x - \tau \nabla J(x)$ et $p_K \circ S$ sont contractantes [1].
2. En déduire que la suite $(x^{(k)})_{k \geq 0}$ converge vers l'unique point fixe $\bar{x}$ de $p_K \circ S$.
3. En utilisant la caractérisation de la projection, démontrer que le point fixe $\bar{x}$ vérifie

$$\forall y \in K, \quad \langle S(\bar{x}) - \bar{x} | \bar{x} - y \rangle \geq 0.$$

   En déduire que le point $\bar{x}$ est l'unique minimum de $(P)$

   *(Indication : pour la deuxième partie de la question 4.3 on pourra utiliser l'inégalité de convexité pour $J$ faisant intervenir $\nabla J$.)*

1. C'est-à-dire $k$-Lipschitzienne pour un certain $k < 1$

### 1.3 Deuxième approche : dualité et algorithme d'Uzawa

Dans cette partie, on résout le même problème (P) par dualité. On note $B$ la matrice de taille $2 \times n$ dont la première ligne est le vecteur $-e_{i_1}$ et la deuxième ligne est le vecteur $e_{i_2}$, où $e_1, \ldots, e_n$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

**Question 5.** Soit $I(x) = \sup_{\lambda_1,\lambda_2 \geq 0} \lambda_1(1 - x_{i_1}) + \lambda_2(1 + x_{i_2})$.

1. Montrer que $I(x) = 0$ si $x \in K$ et $I(x) = +\infty$ sinon.
2. En déduire que $(P) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{\lambda_1,\lambda_2\geq 0} J(x) + \lambda_1(1 - x_{i_1}) + \lambda_2(1 + x_{i_2})$.
3. Montrer que $\lambda_1(1 - x_{i_1}) + \lambda_2(1 + x_{i_2}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \langle Bx|\lambda\rangle$.

On s'intéresse au problème d'optimisation dual, qui peut s'écrire :

$$(D) = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}^2_+} \inf_{x\in\mathbb{R}^n} J(x) + \lambda_1 + \lambda_2 + \langle Bx|\lambda\rangle.$$

**Question 6.** Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2_+$. Montrer qu'il existe un unique point $x_\lambda$ réalisant l'infimum dans $\inf_{x\in\mathbb{R}^n} J(x) + \lambda_1 + \lambda_2 + \langle Bx|\lambda\rangle$, puis que $x_\lambda$ est solution de $G^T G x_\lambda + B^T\lambda = 0$.

On pose désormais $H(\lambda) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n} J(x) + \lambda_1 + \lambda_2 + \langle Bx|\lambda\rangle$, de sorte que $(D) = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}^2_+} H(\lambda)$.

**Question 7.** En posant $R = B(G^T G)^{-1}B^T$, démontrer que

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= -\frac{1}{2}\langle\lambda|R\lambda\rangle + \lambda_1 + \lambda_2 \\ \nabla H(\lambda) &= -R\lambda + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = Bx_\lambda + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \end{aligned}$$

On considère l'algorithme d'Uzawa : étant donné $\lambda^{(0)} \in \mathbb{R}^2$ et $\tau > 0$, on définit

$$\begin{cases} x^{(k)} = -(G^T G)^{-1}B^T\lambda^{(k)} & [= x_{\lambda^{(k)}}] \\ d^{(k)} = Bx^{(k)} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} & [= \nabla H(\lambda^{(k)})] \\ \lambda^{(k+1)} = p_{\mathbb{R}^2_+}(\lambda^{(k)} + \tau d^{(k)}). & \end{cases}$$

La projection de $\lambda \in \mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2_+$ est donnée par $p_{\mathbb{R}^2_+}(\lambda) = (\max(\lambda_1, 0), \max(\lambda_2, 0))$.

**Question 8.** *Convergence de l'algorithme d'Uzawa.*

1. Démontrer que la matrice $R$ est définie positive, de valeur propre $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$.
   *Dans la suite, on suppose que* $0 < \tau < \frac{2}{\lambda_2}$.
2. Montrer que les valeurs propres de $\mathrm{Id}_{n-1} - \tau R$ sont dans $]-1, 1[$, et en déduire que l'application $T : \lambda \mapsto \lambda + \tau\nabla H(\lambda)$ est contractante.
3. Montrer que la suite $\lambda^{(k)}$ converge vers l'unique point fixe $\bar{\lambda}$ de l'application $p_{\mathbb{R}^2_+} \circ T$.
4. Démontrer que $\bar{\lambda}$ est l'unique maximiseur de (D).