Examen du 06/05/2019 — Éléments de correction

1 Problème : minimisation de l'énergie de Dirichlet sous contraintes

Étant donnés trois entiers $1 < i_1 < i_2 < n$ on considère $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{i_1} \geq 1 \text{ et } x_{i_2} \leq -1\}$. L'objectif de ce problème est de résoudre le le problème de minimisation sous contraintes

$$(P) := \min_{x \in K} J(x), \text{ où } J(x) = \frac{1}{2} \|Gx\|^2, \tag{1}$$

et où on a noté G la matrice possédant $n+1$ lignes et n colonnes définie par

$$G_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } j = i - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{soit} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que la norme euclidienne d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ est définie par $\|x\|^2 = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i^2$.

1.1 Étude théorique

Question 1. *Existence et unicité.*

1. Montrer que K est convexe, fermé et non vide.

   Correction. *Montrons la convexité de K : soient $x, y \in K$, $t \in [0,1]$ et $z = (1-t)x + ty$. Alors,*

   $$z_{i_1} = (1-t)x_{i_1} + ty_{i_1} \geq (1-t)1 + t1 = 1,$$

   car $(1-t) \geq 0$, $x_{i_1} \geq 1$, $t \geq 0$ et $y_{i_1} \geq 1$. De même, on montre que $z_{i_2} \leq -1$. Ainsi $z \in K$, ce qui montre que K est convexe. Pour montrer que K est fermé, il suffit de prendre une suite convergente d'éléments de K, e.g. $x^n \in K$ telle que $\lim_{n \to +\infty} x^n \in \mathbb{R}^n$, et de montrer que $\bar{x} \in K$. Or,

   $$\bar{x}_{i_1} = \lim_{n \to +\infty} x^n_{i_1} \geq 1,$$

   et de même $\bar{x}_{i_2} \leq -1$, soit $\bar{x} \in K$. Ainsi K est fermé. Pour montrer que K est non vide, on considère $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_i = 0$ si $i \notin \{i_1, i_2\}$, $x_{i_1} = 1$ et $x_{i_2} = -1$.

2. Montrer que $\nabla J(x) = Qx$ et $\mathrm{D}^2 J(x) = Q$ où $Q = G^T G$.

   Correction. *On a*

   $$J(x) = \frac{1}{2} \|Gx\|^2 = \frac{1}{2} \langle Gx|Gx \rangle = \frac{1}{2} \langle G^T Gx|x \rangle,$$

   où l'on a utilisé $\langle x|Ay \rangle = \langle A^T x|y \rangle$. Ainsi, J est quadratique, $J(x) = \frac{1}{2}\langle Qx|x \rangle$, où $Q = G^T G$ est symétrique. Le premier TD montre que $\nabla J(x) = Qx$ et $\mathrm{D}^2 J(x) = x$.

3. Démontrer que la matrice Q est symétrique définie positive.
(Indication : on pourra commencer par démontrer que $\operatorname{Ker} G = 0$*).*
Correction. *On a déjà vu dans la question précédente que Q est symétrique. Montrons que Q est positive : soit $v \in \mathbb{R}^n$,*
$$\langle Qv|v\rangle = \langle G^T Gv|v\rangle = \langle Gv|Gv\rangle = \|Gv\|^2 \geq 0.$$
On voit de plus que $\langle Qv|v\rangle = 0$ si et seulement si $\|Gv\| = 0$. Or, on constate facilement que si $Gv = 0$, alors $v_1 = 0$ (première ligne de G), puis $v_2 = v_1 = 0$ (deuxième ligne de G)), et par récurrence $v_3 = v_4 = \ldots = v_n = 0$. Ainsi, $\langle Qv|v\rangle = 0$ ssi $v = 0$. On en déuit que
$$\forall v \neq 0, \langle Qv|v\rangle > 0,$$
montrant par définition que Q est symétrique définie positive.
4. En déduire que le problème (P) admet un unique minimiseur, que l'on notera x^*.
Correction. *(Existence) Comme J est une fonction quadratique, et que Q est définie positive, $\lim_{\|x\|\to+\infty} J(x) = +\infty$. De plus J est convexe et l'ensemble K est fermé. Le problème d'optimisation* (1) *admet au moins une solution*
(Unicité) Comme $\mathrm{D}^2 J(x) = Q$ est une matrice symétrique définie positive pour tout x, J est strictement convexe. Comme de plus l'ensemble K est convexe, le problème (1) *admet au plus une solution. En conclusion,* (1) *admet exactement une solution notée x^*.*

Question 2. *Conditions d'optimalité.*

1. Mettre la contrainte sous la forme
$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c_1(x) \leq 0 \text{ et } c_2(x) \leq 0\},$$
où les fonctions $c_1, c_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont à déterminer.
Correction. *L'ensemble K peut être décrit par*
$$\begin{aligned} K &= \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_{i_1} \geq 1 \text{ et } x_{i_2} \leq -1\}, \\ &= \{x \in \mathbb{R}^d \mid c_1(x) \leq 0 \text{ et } c_2(x) \leq 0\} \end{aligned}$$
où $c_1(x) = -x_{i_1} + 1$ et $c_2(x) = x_{i_2} + 1$.
2. Montrer que si l'on pose $x_0 = x_{n+1} = 0$, alors $\frac{\partial J}{\partial x_i}(x) = -x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq n$.
Correction. *On a montré dans une question précédente que*
$$\begin{aligned} \nabla J(x) = G^T G x &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \\ & & & -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \\ & & & -1 \end{pmatrix} x. \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

On peut conclure en remarquant que $\partial J/\partial x_i(x) = (\nabla J(x))_i$. Le résultat s'obtient aussi facilement par calcul direct des dérivées partielles, en remarquant que

$$J(x) = \frac{1}{2}\|Gx\|^2 = \sum_{i=0}^{n}(x_{i+1} - x_i)^2,$$

avec la convention $x_{n+1} = x_0 = 0$.

3. Écrire les quatre conditions d'optimalité données par le théorème KKT. En déduire que si x^* est minimiseur du problème (1), alors

$$\begin{cases} x_i^* = \frac{1}{2}(x_{i-1}^* + x_{i+1}^*) & \forall i \in \{1,\dots,n\} \setminus \{i_1, i_2\} \\ \frac{1}{2}(x_{i_1-1}^* + x_{i_1+1}^*) \le x_{i_1}^* & \\ \frac{1}{2}(x_{i_2-1}^* + x_{i_2+1}^*) \ge x_{i_2}^* & \end{cases}$$

Correction. *Comme J est convexe de classe $\mathcal{C}^1$ et comme l'ensemble K est décrit par deux inégalités affines ($c_1(x) \le 0$ et $c_2(x) \le 0$), le théorème de KKT s'applique (avec $\ell = 2$) :*

$$x^* \in \arg\min_K J \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^2 \ t.q. \ \begin{cases} -\nabla J(x^*) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \nabla c_i(x^*) & \\ x^* \in K & \\ \lambda_i \ge 0 & \forall i \in \{1,\dots,\ell\} \\ \lambda_i c_i(x^*) = 0 & \forall i \in \{1,\dots,\ell\} \end{cases}$$

En remplaçant c_i et J par sa définition,

$$x^* \in \arg\min_K J \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^2 \ t.q. \ \begin{cases} -(-x_{i+1}^* + 2x_i^* - x_{i-1}^*) = 0 & \forall i \notin \{i_1, i_2\} \\ -(-x_{i_1+1}^* + 2x_{i_1}^* - x_{i_1-1}^*) = -\lambda_1 & \\ -(-x_{i_1+1}^* + 2x_{i_1}^* - x_{i_1-1}^*) = \lambda_2 & \\ x_{i_1}^* \ge 1, x_{i_2}^* \le -1 & \\ \lambda_1, \lambda_2 \ge 0 & \\ \lambda_1(-x_{i_1}^* + 1) = \lambda_2(x_{i_2}^* + 1) = 0 & \end{cases} \tag{2}$$

En particulier,

$$x^* \in \arg\min_K J \implies \begin{cases} -(-x_{i+1}^* + 2x_i^* - x_{i-1}^*) = 0 & \forall i \notin \{i_1, i_2\} \\ -(-x_{i_1+1}^* + 2x_{i_1}^* - x_{i_1-1}^*) \le 0 & \\ -(-x_{i_1+1}^* + 2x_{i_1}^* - x_{i_1-1}^*) \ge 0 & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_i^* = \frac{1}{2}(x_{i-1}^* + x_{i+1}^*) & \forall i \in \{1,\dots,n\} \setminus \{i_1, i_2\} \\ \frac{1}{2}(x_{i_1-1}^* + x_{i_1+1}^*) \le x_{i_1}^* & \\ \frac{1}{2}(x_{i_2-1}^* + x_{i_2+1}^*) \ge x_{i_2}^* & \end{cases}$$

4. On définit $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ de la manière suivante, :

$$\bar{x}_i = \begin{cases} \frac{i}{i_1} & \text{si } 1 \le i \le i_1 \\ 1 - 2\frac{i-i_1}{i_2-i_1} & \text{si } i_1 \le i \le i_2 \\ -1 + \frac{i-i_2}{n-i_2} & \text{si } i_2 \le i \le n \end{cases}.$$

En utilisant le théorème KKT, démontrer que $\bar{x}$ est l'unique minimiseur de (1).
Correction. *On utilise l'équivalence (2) : comme $\bar{x}$ vérifie $\bar{x}_{i_1} = 1$ et $\bar{x}_{i_2} = -1$, les lignes 4 et 6 du système sont automatiquement vérifiée. En enlevant ces lignes du système on obtient*

$$\bar{x} \text{ est optimal } \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \begin{cases} -(-\bar{x}_{i+1} + 2\bar{x}_i - \bar{x}_{i-1}) = 0 & \forall i \notin \{i_1, i_2\} \\ -(-\bar{x}_{i_1+1} + 2\bar{x}_{i_1} - \bar{x}_{i_1-1}) = -\lambda_1 \\ -(-\bar{x}_{i_1+1} + 2\bar{x}_{i_1} - \bar{x}_{i_1-1}) = \lambda_2 \\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -(-\bar{x}_{i+1} + 2\bar{x}_i - \bar{x}_{i-1}) = 0 & \forall i \notin \{i_1, i_2\} \\ -(-\bar{x}_{i_1+1} + 2\bar{x}_{i_1} - \bar{x}_{i_1-1}) \leq 0 \\ -(-\bar{x}_{i_1+1} + 2\bar{x}_{i_1} - \bar{x}_{i_1-1}) \geq 0, \end{cases}$$

ce qui par un calcul simple est bien le cas.

1.2 Première approche : algorithme du gradient projeté

Question 3. *Projection sur l'ensemble K.*

1. Rappeler la définition et la caractérisation donnée en cours de la projection d'un point de $\mathbb{R}^n$ sur un convexe fermé.
   Correction. *Voir cours.*
2. Démontrer que la projection de $x \in \mathbb{R}^n$ sur K est donnée par :

$$p_K(x) = (x_1, \ldots, x_{i_1-1}, \max(x_{i_1}, 1), x_{i_1+1}, \ldots, x_{i_2-1}, \min(x_{i_2}, -1), x_{i_2+1}, \ldots, x_n).$$

Correction. *$p = p_K(x)$ est la projection de x sur K (qui est convexe et fermé par Q1) si et seulement si $p \in K$ et*

$$\forall q \in K, \langle x - p | p - q \rangle \geq 0.$$

Ici, $p_i = x_i$ pour tout $i \notin \{i_1, i_2\}$, donc cette condition se réécrit

$$\forall q \in K, (x_{i_1} - p_{i_1})(p_{i_1} - q_{i_1}) + (x_{i_2} - p_{i_2})(p_{i_2} - q_{i_2}) \geq 0.$$

Pour montrer que cette inégalité est vraie, il suffit de démontrer que

$$\begin{cases} \forall q_{i_1} \geq 1, (x_{i_1} - p_{i_1})(p_{i_1} - q_{i_1}) = (x_{i_1} - \max(x_{i_1}, 1))(\max(x_{i_1}, 1) - q_{i_1}) \geq 0 \\ \forall q_{i_2} \leq -1, (x_{i_2} - p_{i_2})(p_{i_2} - q_{i_2}) = (x_{i_2} - \min(x_{i_2}, -1))(\max(x_{i_2}, -1) - q_{i_2}) \geq 0 \end{cases}$$

Montrons la première ligne (la seconde se traite de manière analogue) en distinguant deux cas : si $x_{i_1} \geq 1$, alors $(x_{i_1} - \max(x_{i_1}, 1) = 0$ et l'inégalité est vraie. Si $x_{i_1} \leq 1$, alors $\max(x_{i_1}, 1) = 1$ et

$$\forall q_{i_1} \geq 1, \quad (x_{i_1} - \max(x_{i_1}, 1))(\max(x_{i_1}, 1) - q_{i_1}) = \underbrace{(x_{i_1} - 1)}_{\leq 0}\underbrace{(1 - q_{i_1})}_{\leq 0} \geq 0.$$

Étant donnés $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et $\tau > 0$, on considère l'algorithme de gradient projeté :

$$\begin{cases} d^{(k)} = -Qx^{(k+1)} \\ x^{(k+1)} = p_K(x^{(k)} + \tau d^{(k)}) \end{cases}$$

que l'on peut également mettre sous la forme

$$x^{(k+1)} = p_K(x^{(k)} - \tau \nabla J(x^{(k)}))$$

Question 4. *Convergence de l'algorithme*. On admet que les valeurs propres de $Q = G^T G$ appartiennent $]0, 4[$, et on suppose que $0 < \tau < \frac{1}{2}$.

1. Montrer que les valeurs propres de $\mathrm{Id}_n - \tau Q$ sont dans $]-1, 1[$. En déduire que les applications $S : x \mapsto x - \tau \nabla J(x)$ et $p_K \circ S$ sont contractantes [1].
   Correction. *La matrice Q est symétrique donc diagonalisable : il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in]0, 4[$ et $v_1, \ldots, v_n$ non nuls tels que $Qv_i = \lambda_i v_i$. Ainsi,*

   $$(\mathrm{Id}_n - \tau Q)v_i = v_i - \tau \lambda_i v_i = (1 - \tau \lambda_i)v_i.$$

   On en déduit que les valeurs propres de $\mathrm{Id}_n - \tau Q$ sont $\mu_i = 1 - \tau\lambda_i$. De plus,

   $$0 < \lambda_i < 4 \Longrightarrow_{\tau > 0} 1 - 4\tau < \mu_i = 1 - \tau\lambda_i < 1.$$

   Ainsi, pour que $\mu_i \in]-1, 1[$, il suffit que $1 - 4\tau > -1$, soit $\tau < 1/2$. Supposons que c'est le cas. Alors, comme $\mathrm{Id}_n - \tau Q$ est symétrique, $\|\mathrm{Id}_n - \tau Q\| = \rho(\mathrm{Id}_n - \tau Q)$ où $\|\cdot\|$ est la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ induite par la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ et ρ est le rayon spectral. Ainsi,

   $$\kappa := \|\mathrm{Id}_n - \tau Q\| = \max_i |\mu_i| < 1.$$

   En posant $S(x) = x - \tau\nabla J(x) = (\mathrm{Id}_n - \tau Q)x$, on en déduit

   $$\|S(x) - S(y)\| = \|(\mathrm{Id}_n - \tau Q)(x - y)\| \leq \|\mathrm{Id}_n - \tau Q\| \, \|x - y\| \leq \kappa \, \|x - y\|$$

   où $\kappa < 1$. On en déduit que S est contractante, et que $p_K \circ S$ est aussi contractante comme composition de J et de la fonction p_K qui est 1-lipschitzienne par théorème du cours :

   $$\|p_K \circ S(x) - p_K \circ S(y)\| \underbrace{\leq}_{p_K 1-Lip} \|S(x) - S(y)\| \leq \kappa \, \|x - y\| .$$

2. En déduire que la suite $(x^{(k)})_{k \geq 0}$ converge vers l'unique point fixe $\bar{x}$ de $p_K \circ S$.
   Correction. *On vérifie facilement que $x^{(k+1)} = p_K \circ S(x^{(k)})$. Comme $p_K \circ S$ est contractante, le théorème du point fixe implique que la suite $x^{(k)}$ converge vers l'unique point fixe de $p_K \circ S(x^{(k)})$.*
3. En utilisant la caractérisation de la projection, démontrer que le point fixe $\bar{x}$ vérifie

   $$\forall y \in K, \quad \langle S(\bar{x}) - \bar{x} | \bar{x} - y \rangle \geq 0.$$

   En déduire que le point $\bar{x}$ est l'unique minimum de (P).

1. C'est-à-dire k-Lipschitzienne pour un certain $k < 1$

(Indication : pour la deuxième partie de la question 4.3 on pourra utiliser l'inégalité de convexité pour J faisant intervenir ∇J.)
Correction. *Le point $\bar{x}$ vérifie $\bar{x} = p_K(S(\bar{x}))$. Ainsi, $\bar{x}$ est la projection de $S(\bar{x})$. La caractérisation de la projection sur le convexe fermé K nous donne directement*

$$\forall y \in K, \langle S(\bar{x}) - \bar{x} | \bar{x} - y \rangle \geq 0,$$

et comme $S(x) = x - \tau \nabla J(x)$,

$$\forall y \in K, -\tau \langle \nabla J(\bar{x}) | \bar{x} - y \rangle \geq 0,$$

Soit $y \in K$. Par convexité de J, on a

$$J(y) \geq J(\bar{x}) + \underbrace{\langle y - \bar{x} | \nabla J(\bar{x}) \rangle}_{\geq} 0 \geq J(\bar{x}),$$

ce qui montre que $\bar{x}$ est le minimiseur de J sur K, soit $\bar{x} = x^*$.

1.3 Deuxième approche : dualité et algorithme d'Uzawa

Dans cette partie, on résout le même problème (P) par dualité. On note B la matrice de taille $2 \times n$ dont la première ligne est le vecteur $-e_{i_1}$ et la deuxième ligne est le vecteur e_{i_2}, où $e_1, \ldots, e_n$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Question 5. Soit $I(x) = \sup_{\lambda_1, \lambda_2 \geq 0} \lambda_1(1 - x_{i_1}) + \lambda_2(1 + x_{i_2})$.

1. Montrer que $I(x) = 0$ si $x \in K$ et $I(x) = +\infty$ sinon. ***Correction.*** *On commence par montrer l'égalité pour $x \in K$. Comme $x_{i_1} \geq 1$, pour tout $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_1(1 - x_{i_1}) \leq 0$. De même, pour tout $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_2(1 + x_{i_2}) \leq 0$. Ainsi,*

$$\sup_{\lambda_1, \lambda_2 \geq 0} \lambda_1(1 - x_{i_1}) + \lambda_2(1 + x_{i_2}) \leq 0,$$

et il y a égalité pour $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Ceci montre que $I(x) = +\infty$. Si $x \notin K$, alors $x_{i_1} < 1$ ou $x_{i_2} > -1$. Supposons que $x_{i_1} < 1$, le deuxième cas se traitant de manière similaire. Alors,

$$\sup_{\lambda_1, \lambda_2 \geq 0} \lambda_1(1 - x_{i_1}) + \lambda_2(1 + x_{i_2}) \geq \sup_{\lambda \geq 0} \lambda_1 \underbrace{(1 - x_{i_1})}_{>0} = +\infty,$$

ce qui implique $I(x) = +\infty$.

2. En déduire que $(P) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{\lambda_1, \lambda_2 \geq 0} J(x) + \lambda_1(1 - x_{i_1}) + \lambda_2(1 + x_{i_2})$.
Correction. *C'est une conséquence de*

$$\sup_{\lambda_1, \lambda_2 \geq 0} J(x) + \lambda_1(1 - x_{i_1}) + \lambda_2(1 + x_{i_2}) = \begin{cases} J(x) & x \in K \\ +\infty & x \notin K. \end{cases}$$

3. Montrer que $\lambda_1(1 - x_{i_1}) + \lambda_2(1 + x_{i_2}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \langle Bx | \lambda \rangle$.
Correction.
Il suffit de voir que

$$\begin{aligned} \langle Bx | \lambda \rangle &= (Bx)_1 \lambda_1 + (Bx)_2 \lambda_2 \\ &= \langle -e_{i_1} | x \rangle \lambda_1 + \langle e_{i_2} | x \rangle \lambda_2 \\ &= -\lambda_1 x_{i_1} + \lambda_2 x_{i_2}. \end{aligned}$$

On s'intéresse au problème d'optimisation dual, qui peut s'écrire :

$$(D) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^2} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} J(x) + \lambda_1 + \lambda_2 + \langle Bx|\lambda\rangle.$$

Question 6. Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}_+^2$. Montrer qu'il existe un unique point x_λ réalisant l'infimum dans $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} J(x) + \lambda_1 + \lambda_2 + \langle Bx|\lambda\rangle$, puis que x_λ est solution de $G^T G x_\lambda + B^T \lambda = 0$.

Correction. *La fonction $J_\lambda : x \mapsto J(x) + \lambda_1 + \lambda_2 + \langle Bx|\lambda\rangle$ est convexe car J est convexe et $x \mapsto \langle Bx|\lambda\rangle = \langle x|B^T\lambda\rangle$ l'est aussi. De plus,*

$$\nabla J_\lambda(x) = \nabla J(x) + B^T\lambda = Qx + B^T\lambda.$$

Ainsi x_λ minimise J_λ ssi

$$\nabla J_\lambda(x_\lambda) = Qx_\lambda + B^T\lambda = 0.$$

On en déduit qu'il existe un unique minimiseur, $x_\lambda = -Q^{-1}B^T\lambda$, avec $Q = G^T G$.

On pose désormais $H(\lambda) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} J(x) + \lambda_1 + \lambda_2 + \langle Bx|\lambda\rangle$, de sorte que $(D) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^2} H(\lambda)$.

Question 7. En posant $R = B(G^T G)^{-1} B^T$, démontrer que

$$H(\lambda) = -\frac{1}{2}\langle \lambda | R\lambda\rangle + \lambda_1 + \lambda_2$$
$$\nabla H(\lambda) = -R\lambda + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = Bx_\lambda + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Correction. *Par définition de x_λ,*

$$\begin{aligned}
H(\lambda) &= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} J(x) + \lambda_1 + \lambda_2 + \langle Bx|\lambda\rangle \\
&= J(x_\lambda) + \lambda_1 + \lambda_2 + \langle Bx_\lambda|\lambda\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle Qx_\lambda|x_\lambda\rangle + \lambda_1 + \lambda_2 + \langle x_\lambda|B^T\lambda\rangle \\
&= -\frac{1}{2}\langle Qx_\lambda|x_\lambda\rangle + \lambda_1 + \lambda_2 + \langle x_\lambda|\underbrace{Qx_\lambda + B^T\lambda}_{=0 \text{ par Q6}}\rangle \\
&= -\frac{1}{2}\langle QQ^{-1}B^T\lambda|Q^{-1}B^T\lambda\rangle + \lambda_1 + \lambda_2 \\
&= -\frac{1}{2}\langle\lambda|\underbrace{BQ^{-1}B^T}R\lambda + \lambda_1 + \lambda_2\rangle
\end{aligned}$$

On en déduit (en utilisant que Q^{-1} est symétrique, et que R l'est donc aussi) que

$$\nabla H(\lambda) = BQ^{-1}B^T + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On considère l'algorithme d'Uzawa : étant donné $\lambda^{(0)} \in \mathbb{R}^2$ et $\tau > 0$, on définit

$$\begin{cases}
x^{(k)} = -(G^T G)^{-1} B^T \lambda^{(k)} & [= x_{\lambda^{(k)}}] \\
d^{(k)} = Bx^{(k)} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & [= \nabla H(\lambda^{(k)})] \\
\lambda^{(k+1)} = p_{\mathbb{R}_+^2}(\lambda^{(k)} + \tau d^{(k)}).
\end{cases}$$

La projection de $\lambda \in \mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}_+^2$ est donnée par $p_{\mathbb{R}_+^2}(\lambda) = (\max(\lambda_1, 0), \max(\lambda_2, 0))$.

Question 8. *Convergence de l'algorithme d'Uzawa.*

1. Démontrer que la matrice R est définie positive, de valeur propre $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$.
   Dans la suite, on suppose que $0 < \tau < \frac{2}{\lambda_2}$.

   Correction. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}^2$. *Le calcul précédent montre que*

   $$\langle \lambda | R\lambda \rangle = \langle Qx_\lambda | x_\lambda \rangle \geq 0,$$

   ce qui montre que R *est positive. Pour montrer qu'elle est définie, supposons que* $\langle \lambda | R\lambda \rangle = 0$, *soit* $\langle Qx_\lambda | x_\lambda \rangle = 0$. *Comme* Q *est symétrique définie positive,* $0 = x_\lambda = -Q^{-1}B^T\lambda$, *et donc* $B^T\lambda = 0 = -\lambda_1 e_{i_1} + \lambda_2 e_{i_2}$. *Comme* $i_1 \neq i_2$, *on en déduit* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. *Ceci montre que* R *est définie positive.*
2. Montrer que les valeurs propres de $\mathrm{Id}_{n-1} - \tau R$ sont dans $]-1, 1[$, et en déduire que l'application $T : \lambda \mapsto \lambda + \tau \nabla H(\lambda)$ est contractante. ***Correction.*** *Même calculs que dans la question 4.1*
3. Montrer que la suite $\lambda^{(k)}$ converge vers l'unique point fixe $\bar{\lambda}$ de l'application $p_{\mathbb{R}^2_+} \circ T$. ***Correction.*** *Même arguments que dans la question 4.2*
4. Démontrer que $\bar{\lambda}$ est l'unique maximiseur de (D). ***Correction.*** *Mêmes arguments que dans la question 4.3*