Algorithmes d'optimisation – L3 MINT/DL 2017/2018 – Université Paris-Sud

Examen du 9/05/2018 (3h)

Les documents (notes de cours, anciens TPs, etc) sont interdits. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la correction. Vous pouvez bien sûr admettre les résultats d'une question afin de traiter les questions suivantes. Le sujet numérique est sur `/commun/doc/merigot/M315.ipynb` ***Il doit être copié dans votre répertoire personnel et renommé*** `M315-NUMERODECOPIE`.

1 Problème : projection sur les vecteurs croissants

Les données du problème sont un vecteur $y \in \mathbb{R}^n$. On cherche à résoudre le problème de minimisation sous contraintes

$$(P) := \min_{x \in K} \|x - y\|^2 \quad \text{où } K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall 1 \le i \le n-1, x_i \le x_{i+1}\}. \tag{1}$$

On rappelle que la norme euclidienne d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ est donnée par $\|x\|^2 = \sum_{1 \le i \le n} x_i^2$.

Question 1. Montrer que l'ensemble K est convexe, puis justifier l'existence et l'unicité d'une solution au problème (1).

1.1 Première approche : paramétrisation et gradient projeté

On considère la matrice A de taille $n \times n$ dont les éléments diagonaux et sous-diagonaux sont égaux à un, et les éléments sur-diagonaux sont nuls, i.e. $A_{ij} = 0$ si $j > i$ et 1 si $j \le i$.

Question 2. Dans la suite, on pose $L = \{z \in \mathbb{R}^n \mid z_2 \ge 0, \ldots, z_n \ge 0\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^{n-1}$.

1. Démontrer que $(Az)_i = z_1 + \ldots + z_i$. En déduire que si $z \in L$, alors $Az \in K$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $z = (x_1, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ vérifie $Az = x$.
3. En déduire que $K = \{Az \in \mathbb{R}^n \mid z \in L\}$, puis que $(P) = (P')$ où

$$(P') := \min_{z \in L} F(z) \text{ et où } F(z) = \|Az - y\|^2.$$

Question 3. Rappeler la caractérisation de la projection d'un point sur un convexe fermé. En déduire que la projection de $z \in \mathbb{R}^n$ sur L est donnée : $p_L(z) = (z_1, \max(z_2, 0), \ldots, \max(z_n, 0))$.

Question 4. Montrer que $\nabla F(z) = 2(A^T Az - A^T y)$ et que $D^2 F(z) = 2A^T A$.

Question 5. Démontrer que $A^T A$ est symétrique définie positive (on pourra montrer au préalable que $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$). En déduire que (P') admet exactement un minimiseur.

On suppose dorénavant que les valeurs propres de $A^T A$ appartiennent à l'intervalle $(0, \ldots, \Lambda_A]$. Étant donnés $z^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et $\tau > 0$, on considère l'algorithme de gradient projeté :

$$\begin{cases} d^{(k)} = -2(A^T A z^{(k+1)} - A^T y) \quad [= -\nabla F(z^{(k)})] \\ z^{(k+1)} = p_L(z^{(k)} + \tau d^{(k)}) \end{cases}$$

Question 6. Dans cette question, on suppose que $0 < \tau < 1/\Lambda_A$.

1. Montrer que les valeurs propres de $\mathrm{Id}_n - 2\tau A^T A$ sont dans $]-1,1[$.
2. En déduire que l'application $S : z \mapsto z - \tau \nabla F(z)$ est contractante [1].
3. Démontrer que la suite $(z^{(k)})_{k\geq 0}$ converge vers l'unique point fixe de $\bar{z}$ de $p_L \circ S$.
4. Justifier que le point $\bar{z}$ est l'unique minimum de (P'), puis que $x^* := A\bar{z}$ minimise (P).

1.2 Deuxième approche : dualité et algorithme d'Uzawa

Dans cette partie, on résout le même problème (P) par dualité. Dans la suite, si x, y sont deux vecteurs de même taille, on notera $x \leq y$ si et seulement $\forall i, x_i \leq y_i$.

Question 7. Montrer que $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Dx \leq 0_{\mathbb{R}^{n-1}}\}$ où on a noté D la matrice possédant $n-1$ lignes et n colonnes ayant des 1 dans sa diagonale et des -1 dans sa sur-diagonale, i.e.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Question 8. On pose $I(x) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{n-1}} \langle \lambda | Dx \rangle$. Montrer que $I(x) = 0$ si $x \in K$ et $I(x) = +\infty$ sinon. En déduire que $(P) = \inf_{x \in \mathbb{R}^d} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{n-1}} \|x - y\|^2 + \langle \lambda | Dx \rangle$.

On s'intéresse au problème d'optimisation dual :

$$(D) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{n-1}} \inf_{x \in \mathbb{R}^d} \|x - y\|^2 + \langle \lambda | Dx \rangle.$$

Question 9. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^{n-1}$. Montrer que l'infimum dans $\inf_{x \in \mathbb{R}^d} \|x - y\|^2 + \langle \lambda | Dx \rangle$ est atteint en un unique point $x_\lambda \in \mathbb{R}^d$, que l'on calculera explicitement.

On pose désormais $G(\lambda) = \|x_\lambda - y\|^2 + \langle \lambda | Dx_\lambda \rangle$, de sorte que $(D) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{n-1}} G(\lambda)$.

Question 10. Démontrer que $G(\lambda) = -\frac{1}{4} \left\| D^T \lambda \right\|^2 + \langle D^T \lambda | y \rangle$ puis que $\nabla G(\lambda) = Dx_\lambda$.

On considère l'algorithme d'Uzawa : étant donné $\lambda^{(0)} \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $\tau > 0$, on définit

$$\begin{cases} x^{(k)} = y - \frac{1}{2} D^T \lambda^{(k)} & [= x_{\lambda^{(k)}}] \\ d^{(k)} = Dx^{(k)} & [= \nabla G(\lambda^{(k)})] \\ \lambda^{(k+1)} = p_{\mathbb{R}_+^{n-1}}(\lambda^{(k)} + \tau d^{(k)}). & \end{cases}$$

La projection de $\lambda \in \mathbb{R}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}_+^{n-1}$ est donnée par $p_{\mathbb{R}_+^{n-1}}(\lambda) = (\max(\lambda_1, 0), \ldots, \max(\lambda_{n-1}, 0))$. Dans la question suivante, on admettra que la matrice DD^T est diagonalisable, et que ses valeurs propres sont inclues dans l'intervalle $]0, 4]$.

Question 11. On suppose $0 < \tau < 1$.

1. Montrer que les valeurs propres de $\mathrm{Id}_{n-1} - \frac{\tau}{2} DD^T$ sont dans $]-1, 1[$, et en déduire que l'application $T : \lambda \mapsto \lambda + \tau \nabla G(\lambda)$ est contractante.
2. Montrer que la suite $\lambda^{(k)}$ converge vers l'unique point fixe $\bar{\lambda}$ de l'application $p_{\mathbb{R}_+^{n-1}} \circ T$, puis que $\bar{\lambda}$ est l'unique maximiseur de (D).

Question 12. Montrer que $Dx_{\bar{\lambda}} \leq 0$, où $\bar{\lambda}$ a été introduit dans la question précédente. En déduire que $(P) \leq \|x_{\bar{\lambda}} - y\|^2 = (D)$, puis que $x_{\bar{\lambda}}$ minimise (P).

1. C'est-à-dire k-Lipschitzienne pour un certain $k < 1$